

دليل المعلم

الصف الأول الثانوى

للرياضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على المستقيمات المتوازية و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

والصورة لكوبرى السلام الذى يربط بين ضفتى قناة السويس

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل

أ/ سيرافيم الياس اسكندر

أ/ كمال يونس كبشة

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA
PUBLISHING

الطبعة الأولى ٢٠١٣/ ٢٠١٤

رقم الإيداع ٨٠٠١ / ٢٠١٣

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 009 - 2

المحتويات

الفصل الدراسى الأول

الوحدة الثالثة

نظريات التناسب فى المثلث

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

المحتويات

الفصل الدراسى الثانى

الوحدة الأولى: المصفوفات

الوحدة الثانية: البرمجة الخطية

الوحدة الثالثة: المتجهات

الوحدة الرابعة
الخط المستقيم

الوحدة الخامسة
حساب المثلثات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدّمة

يسعدنا ونحن نقدم هذا الدليل لمعلّمى مادة الرياضيات للصف الأول الثانوى أن نؤكد أن هذا الدليل قد تمَّ إعداده ليكون أداة مساعدة، يستنير بها المعلّم فى تحسين أدائه، وجعل تدريسه عملية وظيفية، تستند فى المقام الأول إلى أسس تربوية سليمة، وفى ضوء نظريات التعلّم الحديثة بحيث يكون دور المعلم ميسرًا لعملية التعلم لإعداد النشء فى عصر العلم والتكنولوجيا، اللّذين أصبحا من ضرورات الحياة للإنسان المعاصر.

ومن هذا المنطلق كان من الضرورى بل من المحتم لمعلّم الرياضيات فهم فلسفة المنهج الذى يعالجه، والذى وضع فى ضوء المناهج المطورة التى تضعها وزارة التربية والتعليم والتى تهتم بالآتى:

التأكيد على مبدأ استمرارية التعلُّم مدى الحياة، من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلُّم الممتزج بالمتعة والتشويق؛ وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات، وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلُّم الذاتى، والعمل التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار وتقبُّل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

تقديم رؤًى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع (Science, Technology, and Society STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب للتصرُّف الواعى والفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

التركيز على تبصير الطلاب بالمفاهيم والمبادئ الرياضية المتعلّقة بالأنشطة الحياتية، وتنمية اتجاهات إيجابية للطلاب تُجاه الرياضيات ودراستها، لتقدير إيجابياتها كأداة فاعلة فى الحياة.

تزويد الطلاب بثقافة شاملة مبنية على رؤية واضحة داخل الإطار البيئى الذى يعيشون فيه، من خلال تنمية الاتجاهات الإيجابية لحسن استخدام الموارد والإمكانات المتاحة.

تنمية وتعميق الانتماء للوطن بإظهار دور الدولة فيما تقدّمه من خِدْمات تعود بالخير والنفع فى جميع المناحى الحياتية.

الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء منهج الرياضيات فى المرحلة الثانوية.

الغاية الأساسية من المنهج الجديد هو مساعدة المتعلم على فهم أساسيات الرياضيات التى تساعده على مواصلة تعليمها أو تعلمها، وكذلك على اتخاذ القرارات السليمة، وحل المشكلات فى حياته اليومية، ومساعدته على تحسين فهم العالم ومشاركته المجتمعية بحيث يمنح تعلم الرياضيات ارتياحًا ذاتيًّا وقوة للمتعلم تتزايد مع استخدامه للتكنولوجيا الحديثة.

ويعتمد المدخل الجديد فى بناء المنهج الحالى على أساسيات المعرفة الرياضية وتنمية طرائق التّفكير وبناء المهارات العلمية ويبتعد عن التفاصيل والحشو، والتعليم التلقينى الذى يولد إستراتيجيات تعليم تقوم على حفظ الحقائق؛ لذلك يتم اختيار المفاهيم والمبادئ العامة، وأساليب البحث وخطط حل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية، والتى تسمح للمتعلم باستخدامها فى مواقف الحياة المختلفة، والتركيز على إكساب المتعلّمين المقدرة على التعلم بأنفسهم، وعلى جمع المعلومات من مصادر متنوعة ومعالجتها واستخدامها عند الحاجة إليها فى دراسة مشكلات ترتبط بحياتهم وبمجتمعهم.

وقد راعى المنهج الحالى ما يلى:

(١) تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

(٢) تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

(٣) تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:
- أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته.
- أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها.
- أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق.
- أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا.
- أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

(٤) اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

(٥) اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

ومن المهارات التى تم التأكيد عليها:

- مهارة التعلم الذاتى.
- مهارة الدراسة والبحث.
- استخدام المراجع والمصادر والاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).
- مهارة التفكير بكل مستوياته ومنها: التفكير النقدى، الإبداعى...
- مهارة التواصل شفهيًّا وكتابيًّا وإلكترونيًّا.
- مهارة التعامل مع الآخرين واحترام آرائهم.
- مهارة تمثيل المعطيات والبيانات على شكل مخططات ورسوم بيانية ومصفوفات وغيرها.
- مهارة استخدام التقنيات الإلكترونية.

(٦) احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

ماذا عن كتاب الطالب؟

(١) يتفق محتوى الكتاب مع جميع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات والأهداف الخاصة لمقرر الصف الأول الثانوى ويحقق المعايير ومؤشراتها لهذا الصف، ويظهر مابين محتوى وحداته من ترابط وتكامل.

(٢) استهلال كل وحدة من وحدات الكتاب بافتتاحية تحوى:
- تهيئة للتشويق وتكوين دافعية لدى الطالب؛ وذلك لاستقراء واستكشاف محتوى الوحدة.
- عرضًا لدروس الوحدة.
- مخطط تنظيمى للوحدة، لتعرف موضوعاتها والمفاهيم المتضمنة بها وعلاقاتها بالمواد الأخرى وتطبيقاتها فى الحياة العملية.

(٣) يبدأ كل درس من دروس كلّ وحدة ببند «فكر وناقش»، ويتناول نقاشًا حول الفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ومن البسيط إلى المركب.

(٤) ينتهى كلُّ درس من كلِّ وحدة ببند «تحقق من فهمك»، ويعرض بعض الأسئلة التى تنتقل من الاستفهام المباشر إلى التفكير المتعمق. والتى قد تربط الرياضيات بالعلوم الأخرى.

(٥) يتضمَّن محتوى كلِّ وحدة مجموعة من المعالم المتميزة، والمرتبطة ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الوحدة تتضمن أنشطة تربوية (تطبيقات حياتية، مسألة للتفكير، تعليل واستنتاج، عمل تعاونى، تفكير ناقد).

(٦) يتضمن كتاب الأنشطة والتدريبات تدريبات متنوعة على كل درس وتنتهى كلُّ وحدة بتمارين عامة واختبار للوحدة

واختبار تراكمى يشتمل على العديد من الأسئلة ويتضمن أسئلة موضوعية، ومقالية بنوعياتها، وذات الإجابات القصيرة وتتناول الوحدات التى سبق أن درسها الطالب، ويشمل الكتاب اختبارات فى نهاية كل فصل دراسى تم بنائها فى ضوء جداول المواصفات التى تم إعدادها، كما روعى ماطرأ من تحديث وتطوير فى مجال بناء الاختبارات التقويمية.

(٧) يتضمن الكتاب الأشكال والرسوم التى جاءت مرتبطة ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الكتاب، وقد تمَّ توظيفُها بشكل يمكِّن الطالب من إدراك العلاقات بين المتغيِّرات، من خلال عمليات التفسير والتحليل والاستنتاج، كما روعى دقة الأشكال الهندسية والرسوم التوضيحية.

دور الدليل للمعلم

إنَّ تناوُلنا لكلِّ وحدة من الوحدات المقررة على حِدَةٍ فى هذا الدليل من حيث الأهداف والخطة الزمنية والمعالم والوسائط التعليمية وطرق تدريس المحتوى والتقويم - ليس الهدف منه وضع قيدٍ على المعلِّم، بحيث نحدُّ من حريته فى تناول ومعالجة كلّ وحدة أو إلزامه بأسلوب معين، بل هو محاولة من جانبنا نقدِّمها للمعلّم، كى تنير له الطريق وتمهّد السبيل لتحقيق الأهداف المنشودة، فى الوقت الذى نقدّر فيه أنَّ لكل معلّم شخصيتَهُ المميزة ومهاراته وإبداعاته الخاصة به.

كيف تستخدم هذا الدليل؟

لقد حاولنا أن يكون هذا الدليل وافيًا بجميع العناصر التى قد تحتاجها لتدريس هذا المقرر وسيكون أمامك صورة من صفحات كتاب الطالب فى كل درس، مما يساعدك على ربط توجيهات الدليل مع ما يراه الطالب فى كتابه، ومما لا شك فيه أن هذا يزيد فائدة الدليل بالنسبة لك، إلى جانب الصورة المصغرة من صفحة كتاب الطالب تتضمن صفحة المعلم العناصر التالية بالنسبة لكل وحدة وكل درس.

(١) مقدمة الوحدة: وتشمل الموضوعات والدروس التى تتضمنها الوحدة وأهداف تدريسها مع إشارة لما تحتاج أن تعده قبل البدء فى تدريس الوحدة.

(٢) يبدأ كل درس بخلفية تذكرك بخبرات الطلاب السابقة، وموقع الدرس، وما به من مفاهيم ومهارات. هذه الخلفية لك أنت وليست بداية الدرس.

(٣) سنجد فى بداية الدرس بعض البيانات المهمة، مثل

أ) أهداف الدرس وهى مكتوبة بصورة إجرائية قابلة للملاحظة والقياس.

ب) المواد التعليمية المستخدمة وهنا نشير إلى المواد التعليمية التى سوف تستخدمها أثناء الدرس سواء ستقوم أنت بإعدادها أو ستكلف الطلاب بإعدادها أو إحضارها.

جـ) المفردات الجديدة التى تناولها الدرس وعليك أن تساعد طلابك على فهمها وتعلمها.

(٤) استراتيجيات التدريس، ويقدم لك هذا الدليل خطوات تدريس الدرس فى تتابع على النحو التالى.

أ) التمهيد: وذلك من خلال مناقشة العمل التعاونى أو بند "فكر وناقش" الوارد فى بداية الدرس ومن المعروف أن توافر الدافعية فى التعلم لدى الطلاب أمر لازم بل وحتمى لضمان حسن سير الدرس وإيجابية الطلاب، وبالتالى تتحقق الأهداف المنشودة. ويجب ألا يطغى زمن تهيئة الطلاب على الزمن المخصص لباقى أنشطة الدرس، وعادة لا يزيد زمن تهيئة الدرس عن عشر دقائق.

ب) عرض الدرس: بعد التهيئة - وفى ترابط وسلاسة - يدخل المعلم إلى خطوات عرض الدرس، فيبدأ فى تنفيذ الأنشطة الواردة فى هذا الجزء من الدليل وهى ترتبط ارتباطًا وثيقًا بصفحة كتاب الطالب أو كتاب الأنشطة، وأن الربط بين ما يحدث فى مرحلة تهيئة الطلاب وبين بداية الدرس أمر مهم جدًّا، حتى لا تفقد التهيئة أهميتها ودورها فى نجاح الدرس.

جـ) التقييم والتدريب: ويشمل هذا البند جوانب هامة هى "التقييم المستمر" ويشمل إجابات لما ورد فى بند "حاول أن تحل" أو يشمل أسئلة شفهية أو تحريرية خلال عرض الدرس، الجانب الآخر هو" التقييم و التدريب"، ويشمل هذا البند إجابات ما ورد فى بند "تحقق من فهمك" و الجانب الثالث هو "التقييم"، ويشمل أسئلة شفهية أو تحريرية

تساعدك على التأكد من تحقيق أهداف الدرس، ومدى استفادة طلابك وما تعلموه، وذلك جنبًا إلى التمارين العامة والاختبارات الواردة فى نهاية كل وحدة بكتاب الأنشطة والتدريبات.

جـ) **أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين:** يقدم الدليل فى نهاية كل درس أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين، ولكن حذار أن تعلن أن هذا النشاط خاص بالطلاب المتفوقين ولا تقسم الطلاب فى الفصل إلى مجموعات وفقًا لمستوياتهم، فهذا النشاط خاص بالمعلم ليواجه الفروق الفردية بين طلابه، يمكنك أن تستقطع وقتًا فى ذات الدرس للقيام بهذه الأنشطة الإثرائية، وأحيانا يكلف بها الطلاب كنشاط خارجى يقومون به بعد الدرس، وقد يعرضون عليك ما أنجزوه فى هذه الأنشطة خارج وقت الحصة، أو قد تراجع معهم إنجازاتهم فى بداية الحصة التالية، وقبل التهيئة الجديدة (يتوقف ذلك على نوع تلك الأنشطة، وما تحتاجه من زمن لمتابعتها)، ونشير هنا إلى أنه عند تكليف أى طالب بنشاط ما يجب أن تتابع إنجازه فيه، حيث أن عدم توفر ذلك يؤدى إلى تكاسلهم بل وإهمالهم القيام بأى نشاط إثرائى.

والأن عزيزى المعلم كى تقوم بدورك على أكمل وجه سوف. نتناول عرض موجز عن النقاط التالية:

- طبيعة مادة الرياضيات وعلاقتها بالمواد الأخرى.
- تنظيم محتوى مادة الرياضيات فى الصف الأول الثانوى.
- تصنيف أهداف تدريس الرياضيات.
- إستراتيجيات عامة للتدريس.
- معايير ومؤشرات الصف الأول الثانوى.
- الاتجاهات الحديثة لتعليم الرياضيات.
- خصائص النمو لطلاب المرحلة الثانوية.
- إدارة وتنظيم بنية التعلم النشط.
- بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى.

طبيعة الرياضيات

الرياضيات فى جوهرها ذات طبيعة استدلالية، حيث يمكن إشتقاق نتائج صادقة من مقدمات مسلم بصدقها، وذلك عن طريق السير فى خطوات استدلالية تحكمها قوانين المنطق، والرياضيات بناء على ذلك تستخدم المنهج الاستدلالى فى إشتقاق نظرياتها ونتائجها، وبالتالى تعتبر الرياضيات بناء استدلالى تتسم قضاياها بالتجريد؛ أى أنها لا تحمل أى معنى، وتكسب معناها من خلال النظام الرياضى الذى تستخدم فيه. هذه هى طبيعة الرياضيات كعلم؛ أى كما توصل إليها العلماء، ولكن هناك فرق بين الرياضيات كعلم وكمادة دراسية يقوم مجموعة من المعلمين بتدريسها لمجموعات من المتعلمين فى مراحل تعليم مختلفة. ونشير هنا إلى الفرق بين الرياضيات كعلم والرياضيات كمادة دراسية، حيث تختلف صورة الرياضيات كعلم عن الرياضيات كمادة دراسية فى طريقة المعالجة وأسلوب العرض والتركيز أو التعقيد فى المادة ذاتها، إلا أن طبيعة الرياضيات كعلم لا تختلف عن طبيعتها كمادة دراسية من حيث كونها بناء استدلالى، والرياضيات كمادة دراسية تحتوى فى جوهرها المفاهيم الأساسية لعلم الرياضيات ولكن بعد تبسيطها حتى تلائم خصائص المتعلم الذى يمر بمرحلة نمو معينة، وتناسب خلفيته الرياضية وعندما يدرس الطالب الرياضيات فإنه ليس من المهم أن يشتق معلومات رياضية جديدة مثلما يفعل العلماء؛ بل يكون الاهتمام منصبًا على اكساب المتعلم كيفية إجراء العمليات الاستدلالية البسيطة التى يمكن بواسطتها اشتقاق بعض النتائج من معلومات رياضية متاحة لديه. كما أن المسلمات فى علم الرياضيات لها طبيعة تجريدية، بينما يجب أن تكون تلك المسلمات فى الرياضيات كمادة دراسية واضحة ومفهومة للمتعلم ومقرونه بأمثلة ملموسة فى البداية قبل التقدم إلى المجرد، ثم الهبوط ثانيًا إلى الملموس عن طريق التطبيقات على مواقف الحياة العملية ومشكلاتها؛ أى أن تعليم المعلومة المجردة يجب أن يمر بثلاثة مراحل هى التمهيد والتقديم والتثبيت (ملموس – مجرد – ملموس) ومن المهم أن يفهم المعلم طبيعة الرياضيات، حتى يستفيد من ذلك عند قيامه بمهامه التدريسية داخل حجرة الدراسة، وما تم ذكره ما هو إلا خطوط إرشادية عريضة وعامة يجب أن يضعها المعلم فى الاعتبار، حتى يجعل أسلوبه العام فى التدريس يسير وفقًا لها.

الرياضيات والعلوم الأخرى

الرياضيات علم حى دائم التطور، تزداد أهميته إلى درجة القول بأن الرياضيات أصبحت مركز التطور الحضارى والتكنولوجي المعاصر والمستقبلى، وذلك لأن تطبيقاتها وأنماطها أصبحت تغطى كل أنواع الأنشطة فى العلوم الصلبة والعلوم الناعمة .. فى الفنون والآداب فى سوق العمل ومجالات الترويح ... فى الإستراتيجيات العسكرية وقرارات السياسيين وفى الإنتاج والخدمات. الرياضيات كانت ومازالت نشاطًا يعبر عن ثقافة إنسانية تتوسع من داخلها لتحل مشكلات من خارجها، وتكتشف من خلال نمذجه وتجريد مواقف من خارجها علاقات تثريها من داخلها، لم يعد نشاط الرياضيات قاصرًا على العدد والشكل اللذين كانا مصدرى إلهامها، بل يمتد إلى نشاطها لدراسة العلاقات والأنماط وإلى اشتقاق نتائج مع مقدمات، ولم تعد الرياضيات مجرد أرقام ورموز يفهمها قلة من الناس، بل لغة يتواصل بها ويتعامل معها غالبية البشر، ويعمل منطقها على تيسير عمل الحاسبات وبث واستقبال المعلومات والتواصل بها من خلال الألياف الضوئية، تعددت مجالات وفروع الرياضيات فى بنى مجردة مثل الزمرة (Group) والحقل (Field) وفضاء المتجه (Vector space) لها تمثيلاتها فى الفروع المختلفة.

ورغم كل التجريدات الرياضية فإن الرياضيات تنصت للطبيعة لترسم بها نماذج ينبثق منها وعنها حلول للمشكلات والرياضيات تتعامل مع المؤكدات ومع الاحتمالات واللايقينيات، مع مظاهر استاتيكية وأخرى ديناميكية .. وفوضوية تتعامل مع أشكال مثالية منتظمة وأخرى معقدة، مع أبعاد صحيحة وأخرى كسورية، وتسهم الرياضيات فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها علاقات بلغة الرياضيات ورموزها، يتم حلها ثم إعادة ترجمتها إلى أصولها المادية ، الرياضيات – مثلاً – تشرح وتفسر لنا ظواهر النمو فى الكائنات الحية وظاهرات التآكل من مواد إشعاعية (والتى تمثلها قوى أسية فى الجبر)، كما أن الرياضيات تقدم لنا نماذج عديدة للتصميمات المعمارية والصناعية، وتنظم لنا عمليات الأنشطة الخدمية والإنتاجية، وتتنبأ لنا بجدوى القيام بمشروعات جديدة، الرياضيات تصف لنا كيف تنساب الموسيقى ونغماتها الجميلة، الرياضيات تمدنا بأشكال هندسية يمكن أن تمثل وحدات التكوين بأشكال زخرفية ومصورات فنية جميلة

تنظيم محتوى الرياضيات فى الصف الأول الثانوى:

يجرى تدريس الرياضيات فى الصف الأول الثانوى فى شكل وحدات دراسية موزعة مصفوفيًّا بين صفوف المرحلة الثانوية، وبين المجالات المعروفة: الأعداد والعمليات عليها، الجبر والعلاقات والدوال، الهندسة، وحساب المثلثات. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيًّا (عبر الصفوف) وحلزونيًّا فى كل فرع، ويتوزع أفقيًّا (فى كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس– إلى حد ما– وحدة الفكر الرياضى. ويراعى فى جميع الحالات التناغم الرياضى لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

تصنيف أهداف تدريس الرياضيات:

يواجه المعلم دائمًا بالسؤال الآتى «لماذا نعلِّم الرِّياضيات؟»

هناك أكثر من طريقة للتعريف بتصنيف أهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

(١) **أهداف معرفية** Cognitive تتعلّق بالمفاهيم والنَّظريات والمهارات العقليَّة المتدرجة والمتنوعة فى تعلُّم معارف رياضيَّة كثقافة عامة أو كإعداد لدراسات تالية فى المراحل التعليمية المتتابعة. وهناك ثلاثة مستويات معرفية: مستوى أدنى، ويتضمّن مجرد تذكُّر المعلومات واستيعابها. ومستوى وسيط، ويتضمّن التطبيقاتِ المباشرة لما يتعلمه الطالب من قوانين ونظريات. ومستوى أعلى، ويتضمن تنمية مهارات التفكير العليا، وحل المشكلات بما تتطلبه من تحليل وتركيب وتقويم لمسائل وعلاقات ومواقف رياضية وتطبيقية.

(٢) **أهداف وجدانيّة** Affective تتعلّق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشرى، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها فى التقدُّم ونحو أساليبها فى التفكير ودقة لغتها فى الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البيانى.

(٣) **أهداف نفسحركية** Psychomotor يقصد بها تنمية المهارات العملية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضى هندسى أو حسابى أو حوسبى (متعلقة بالحاسوب) سواء فى صورة آلات حاسبة calculators أو حواسيب computers، وأن يكتسب الطالب مهارات استخدام التكنولوجيا المتاحة من أجهزة وأقراص مدمجة CDs جاهزة ومناسبة.

إستراتيجيات عامة للتدريس

إستراتيجية التدريس: هى خطة تحركات المعلم فى تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسى للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الاستراتيجية بمدى كفاءتها فى أن يتعلَّم الطلاب ما يراد لهم أن يتعلموه، بغرض مساعدة الطلاب فى أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التى يتعلمونها فى ضوء النظرية البنائية Constructivism وتتضمن إستراتيجية التدريس أن يقوم المعلم بالآتى:

- ❑ التقدُّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).
- ❑ إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.
- ❑ توزيع العمل بين أعمال تعاونية فى مجموعات صغيرة تعمل تعاونيًا، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.
- ❑ فى نهاية كل مناقشة أو عمل تعاونى أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمنًا الأساسيات: تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.
- ❑ إعطاء الطلاب فرصًا داخل الفصل أو المنزل (واجبات - لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم).
- ❑ تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.
- ❑ عند تدريس أى مفهوم أو علاقة بين عدة مفاهيم يعطى المعلم أمثلة، ويطلب إلى الطلاب، إعطاء أمثلة تمثل المفهوم أو تحقِّق العلاقة، وأخرى لاتمثلها ولاتحققها.
- ❑ ابتعاد المعلم عن الشرح طوال الوقت وكتابة الحلول جاهزة كاملة على السبورة وطلب نقلها فى الكراسات من دون مناقشة أو محاولات مسبقة من الطلاب.
- ❑ تنويع السلوكيات (أى طرق التدريس) فى الحصة الواحدة.
- ❑ الحرص على إعطاء رعاية خاصة فى فترة العمل الفردى أو فى المجموعات التعاونية للطلاب بطيئى التعلم أو من هم دون المستوى فى قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.
- ❑ تنويع الواجبات سواء داخل الفصل أو فى المنزل مع مراعاة الفروق الفردية- ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين فى الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيُقدَّم لهم الحد الأدنى، ويُلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل متدرِّجين فى الواجبات.
- ❑ تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الفصل فى مكتب المعلم أو فى المكتبة.
- ❑ مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق فى هذا المقرر.

وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمى هو مادَّة تعليمية مكتوبة أو مرسومة، أو صورة ثابتة أو متحرِّكة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراص مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة فى عرض واستخدام الموادِّ التعليميَّة والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليميُّ ملصقًا أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعًا خشبيَّة أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوبًا، وقد تكون موادَّ من الطبيعة أو مصنعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معمليَّة.

والأصل فى الوسيط التعليمى هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملًا تعليميًّا نشيطًا، لا أن يكتفى بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آليًّا، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بيانى لأحد الجداول مستخدمًا برنامج اللوحة الجدولية spreadsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO).

والمبدأ الذى نرتئيه هنا هو أن التكنولوجيا بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعددة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم»- بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم فى تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

معايير ومؤشرات الصف الأول الثانوى

المجال الأول: الجبر والعلاقات والدوال

المعيار الأول: يحل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد وتطبيقات عليها، ويتعرف الأعداد المركبة.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يحل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة الدالة.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى العدد ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين)
- يحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

المعيار الثانى: يتعرف المصفوفات والمحددات، وخواصهما، والعمليات عليهما، وتطبيقاتهما.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها (مصفوفة الصف، مصفوفة العمود، المصفوفة المربعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفة القطرية، مصفوفة الوحدة، المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة)
- يضرب عدد حقيقى فى مصفوفة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات باستخدام مهارات التفكير الرياضى.
- يستنتج خاصيتى العنصر المحايد الجمعى، والعنصر المحايد الضربى لمصفوفة مربعة.
- يستخدم الحاسوب، ويحدد إمكانية حل معادلات من الدرجة الأولى فى عدد من المجاهيل باستخدام المصفوفات.
- يتحقق من صحة حلول بعض المشكلات التى تضمن مصفوفات باستخدام البرمجيات المتاحة.
- ينمذج بعض المواقف الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات أخرى مثل: الصناعة والطاقة.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية، والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة المحدد باستخدام عناصر الصفوف والأعمدة.
- يوجد قيمة المحدد على الصورة المثلثية
- يتعرف، ويوجد معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة.
- يحل المعادلات بطريقة كرامر.
- يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.

المعيار الثالث: يتعرف البرمجة الخطية ويحل مشكلات رياضية حياتية عليها.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يستنتج خواص متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد وطريقة حلها.
- يُعين مجموعة حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين، وتحديد منطقة الحل بيانيًا.
- يحدد منطقة حل متباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى فى مجهولين بيانيًا.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات، ثم يحدد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل، ويعطى الحل الأمثل لدالة الهدف.

المجال الثانى: الهندسة

يستكمل دراسة مفاهيم ومهارات متضمنة بالهندسة المستوية، وتطبيقاتها فى مواقف رياضية وحياتية مختلفة. ويطبق مبادئ الهندسة التحليلية فى مواقف رياضية وحياتية مختلفة.

المعيار الأول: يتعرف التشابه، ويبرهن نظريات عليه، ويحل تطبيقات رياضية عليه.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية علي موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف، ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان)
- يتعرف، ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحين مثلثين متشابهين تساوى...)
- يتعرف، ويستنتج الحقيقية التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى...)
- يتعرف، ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى...)
- يتعرف، ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على:(إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن...) وعكسه، ونتائج عليه.

المعيار الثانى: يتعرف ويبرهن نظريات التناسب، ويحل تطبيقات رياضية عليها.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يتعرف، ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه...) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف، ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية فإن...) وحالات خاصة منها.
- يتعرف، ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة لمثلث عند هذا الرأس...) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة للدائرة (القواطع والمماسات)
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

المعيار الثالث: يتعرف المتجهات، والعمليات عليها، ويحل تطبيقات عليها.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة.
- يُعبِّر عن القطعة المستقيمة الموجهة بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع

- يضع متجه الموضع فى الصورة القطبية
- يوجد معيار المتجه، والمتجه الصفرى
- يتعرف، ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة.
- يُعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين، وتعامد متجهين.
- يضرب متجه فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الاحداثيات، طريقة متوازى الأضلاع)
- يطرح متجهين.
- يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.
- يحل تطبيقات فى الهندسة المستوية على المتجهات

المعيار الرابع: يتعرف الخط المستقيم، ويحل تطبيقات عليه.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

تتم المعالجة بطريقة المتجهات والطريقة الكارتيزية فى ضوء المؤشرات التالية:

- يوجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علم نهايتا القطعة المستقيمة.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة، والمعادلات البارامترية، والمعادلة الكارتيزية
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

المجال الثالث: حساب المثلثات

يطبق أساسيات حساب المثلثات فى مواقف رياضية وحياتية مختلفة.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة
- يتعرف نوع قياس الزاوية (الستينى، الدائرى)
- يتعرف القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية
- يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الإرباع الأربعة.
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة ($١٨٠° \pm \theta$، $٣٦٠° \pm \theta$، $٩٠° \pm \theta$، $٢٧٠° \pm \theta$).

- ✍ يتعرف التمثيل البياني للدوال المثلثية د(س) = جا س، د(س) = جتا (س)، ويستنتج خواص كل منهما.
- ✍ يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة، ولأى زاوية.
- ✍ يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم الدوال المثلثية لها.
- ✍ يستخدم الآلة الحاسبة فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ✍ يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.
- ✍ ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية.

المعيار الثانى: يستكمل دراسة أساسيات حساب المثلثات، وتطبيقها فى مواقف رياضية وحياتية مختلفة.

المؤشرات: يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة وكيفية تنفيذ الأنشطة فيها أن:

- ✍ يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية.
- ✍ يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية
- ✍ يحل معادلات مثلثية بسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠°، ٣٦٠°]
- ✍ يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:
  - ❑ جا أ س = جتا ب س
  - ❑ قا أ س = قتا ب س
  - ❑ ظا أ س = ظتا ب س
- ✍ يحل المثلث قائم الزاوية
- ✍ يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض
- ✍ يتعرف القطاع الدائرى
- ✍ يتعرف القطعة الدائرية.
- ✍ يتعرف الحل العام للمعادلة المثلثية.
- ✍ يوجد مساحة المثلث، ومساحة الشكل الرباعى، ومساحة المضلع المنتظم
- ✍ يحل مسائل متنوعة على حساب المثلثات.
- ✍ يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثيات.
- ✍ ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية.

الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات

هناك عدة اتجاهات حديثة لتعليم وتعلم الرياضات نورد منها ما يلى:

تعليم الرياضيات من أجل حل مشكلات البيئة والمجتمع: ويدعو هذا الاتجاه لأن يكون للرياضيات دورًا فى معالجة قضايا ومشكلات المجتمع، وأن ترتبط المعرفة الرياضية بالخبرات الحياتية والبيئية للطلاب.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية انماط التفكير وأسلوب حل المشكلات: يعد هذا الاتجاه من الاتجاهات المفضلة فى تعليم الرياضيات، وقد نبع هذا الاتجاه نتيجة للتغير السريع فى المعارف والأساليب التكنولوجية واستخداماتها، ولذا أصبحت المعرفة فى حد ذاتها ليست هى الهدف الاسمى بل طرق الحصول عليها، وهو ما يتمثل فى أنماط التفكير المختلفة وأسلوب حل المشكلات والتى يمكن تنميتها من خلال تعليم وتعلم الرياضيات.

تعلم الرياضيات ذاتيًا باستخدام الحاسب الآلى: ادى الانفجار المعرفى إلى ظهور الحاجة إلى التعلم الذاتى وظهرت عدة أساليب للتعلم الذاتى من أهمها التعلم بالمراسلة والموديولات التعلمية وباستخدام الحاسب الآلى.

إلا أن تعلم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى نال اهتمامًا كبيرًا من قبل التربويين والباحثين فى مجال تعليم وتعلم الرياضيات وظهرت العديد من البرامج بالعربية والإنجليزية لتعليم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية الإبداع: للرياضيات دور هام فى تنمية الإبداع لدى المتعلمين لما لها من طبيعة تساعد على ذلك، لأن الرياضيات بمضمونها تعتمد على إدراك العلاقات للوصول إلى النتائج والنظريات وغيرها من الإبداعات، وجوهر الإبداع

هو إدراك علاقات جديدة تؤدى إلى تنوع من الحلول للمشكلة الرياضية المطروحة. لهذا اعتبر التربويون أن تنمية الإبداع هدف أساسى من أهداف تعليم الرياضيات.

تعليم الرياضيات للفئات الخاصة: أدى الاهتمام بحاجات المتعلم، وضرورة تعليمه بقدر ما تسمح به استعداداته وقدراته إلى ظهور اتجاه نحو تعليم الرياضيات للفئات الخاصة (بطيئ التعلم - المتفوقون - المعاقين) حيث لكل من هذه الفئات استعداداته وقدراته وإمكاناته، وأصبح من الضرورى تصميم مناهج للرياضيات لكل فئة من هذه الفئات حتى يمكن أن تتعلم كل فئة بقدر ما لديها من خصائص.

تعليم الرياضيات فى ضوء مفهوم العولمة: نتيجة للتقدم الهائل فى تكنولوجيا الاتصال، لم يعد للبعد الجغرافى تأثيرًا فى عزل الدول عن بعضها البعض، وأصبح العالم كقرية صغيرة متشابكة الأطراف، وأصبح للمشكلات وخاصة البيئية صفة العالمية، حيث لم تعد دولة واحدة بإمكاناتها قادرة على مواجهة هذه المشكلات، وبالتالى لم يعد مبدأ الاكتفاء الذاتى صالحًا للتطبيق عن ظل هذه الظروف فحل محله مبدأ الاعتماد المتبادل الذى يدعو إلى إنفتاح دول العالم على بعضها البعض، لنعيش فى سلام عالمى وتعاون مشترك من أجل خير الإنسان، وهذا ما يؤدى إلى إتساع بيئة الإنسان من المحلية إلى العالمية. وهذا ما يدعو إلى أن تكون مناهج الرياضيات التى يدرسها المتعلم تساعد فى إعداده لذلك.

تعليم الرياضيات باستخدام الإنترنت: الإنترنت هو منظومة عالمية تربط مجموعة من الحاسبات الآلية بشبكة واحدة والإنترنت عدة مميزات دفعت التربويين إلى المناداه بضرورة استخدامه وهى:

- ✍ الوفرة الهائلة فى مصادر المعلومات ومنها: الكتب الالكترونية، الدوريات، قواعد البيانات، الموسوعات، المواقع التعليمية
- ✍ الاتصال غير المباشر وذلك من خلال البريد الالكترونى، والبريد الصوتى.
- ✍ الاتصال المباشر وذلك من خلال التخاطب الكتابى المباشر، والتخاطب الصوتى والتخاطب بالصوت والصورة.

تعليم الرياضيات المزود بالحاسوب: يتنوع الاستخدام التعليمى للحاسوب من مساعدة الطلاب على تعلم القواعد الأساسية إلى تعلمهم لاستراتيجيات التفكير المعقد، والحاسوب أداة فعالة للطالب المتوسط القدرة، والطالب المعاق وللطالب المتفوق، ويأتى ذلك من قدرته على التكيف التعليمى لمواجهة الاحتياجات المتنوعة للطلاب ذوى القدرات المختلفة، وقد أثبتت البحوث أن التعليم المزود بالحاسوب (CAI) يوفر الجهد والوقت فى التفكير وفى حل المشكلات، كما أن الحاسوب وسيلة فعالة فى تشخيص وعلاج الأخطاء الرياضية لدى الطلاب.

خصائص نمو طلاب المرحلة الثانوية

على الرغم من إجماع علماء التربية وعلم النفس على أن عملية النمو متداخلة إلا أنهم قسموه إلى مراحل تراعى فى كل منها الصفات العامة التى تميز المتوسط العام للأطفال فى تلك الفترة من النمو وذلك كى تسهل دراسة النمو فى كل فترة عمرية، وهذه المراحل رغم تحديد بدايتها ونهايتها إلا أنها ليست محددة تحديدًا واضحًا؛ بل أن نهاية كل فترة منها تتداخل مع بداية الفترة التى تليها تداخلاً كبيرًا، كما أنها قد تختلف فى الأفراد اختلافًا كبيرًا من حيث بدايتها ونهايتها.

ومعرفة خصائص النمو لطالب المرحلة الثانوية يساعدنا على معرفة حاجاته، وتعرف مدى نمو الطالب بالنسبة لمتوسط اقرانه، ويعيش طالب المرحلة الثانوية فى مرحلة عمرية تسمى مرحلة المراهقة، ويقصد بالمراهقة أنها مرحلة النمو الذى يصل فيها الطفل إلى مرحلة البلوغ، وعند استخدام مصطلح المراهقة فإن هذا المصطلح يتضمن نموًا جسميًّا واجتماعيًّا ونفسيًّا، وتبدأ مرحلة المراهقة عند البنين فى ثلاث عشرة سنة فأكثر تقريبًا، وتبدأ عند البنات فى سن اثنتى عشرة سنة فأكثر تقريبًا، يختلف سن بداية المراهقة من مجتمع إلى مجتمع وغالبًا ما تبدأ مبكرة فى المناطق الحارة عنها فى المناطق الباردة، ومرحلة المراهقة المبكرة التى تبدأ مع بداية البلوغ وتنتهى عند سن ست عشرة أو سبع عشرة سنة، وقد تم تحديد هذا السن بطريقة قسريه تختلف من مجتمع لآخر، وهناك اتفاق على أن تنقسم فترة المراهقة إلى مرحلتين هما، المراهقة المبكرة، المراهقة المتأخرة، وتبدأ مرحلة المراهقة المبكرة مع سن البلوغ وتنتهى فى سن ١٦ أو ١٧ سنة أو عند التحاق المراهق بالصف الثانى أو الثالث الثانوى، أما مرحلة المراهقة المتأخره فتبدأ فى نهاية التعليم الثانوى وتمتد إلى مرحلة التعليم الجامعى، وفى المرحلة الأخيرة وهى التى يستعد فيهاالمراهق لدخول مرحلة الرشد فيستعد لذلك مهنيًا ويتعرف بشكل أكثر نضجًا وقد تمتد هذه المرحلة إلى ٢٠ سنة أو أكثر.

وتعد فترة المراهقة من أهم فترات حياة الإنسان بسبب أثارها المباشرة على الاتجاهات والسلوك وتتميز هذه الفترة بالنمو الجسمى السريع يصاحبه نمو عقلى ذو معدلات مختلفة مما يؤدى إلى ظهور الحاجة إلى التوافق وإلى ضرورة إرساء اتجاهات جديدة وقيم إجتماعية مغاييرة عن تلك القيم التى اعتاد عليها الفرد قبل أن يمر بمرحلة المراهقة.

النمو الجسمى

تعد «مرحلة المراهقة» طفرة فى النمو الجسمى، فهى مرحلة نمو جسمى سريع، وهذه التغيرات السريعة التى تصاحب النمو الجسمى ومنها الجنسى تجعله غير واثق فى نفسه وفى قدراته واهتماماته، وتكون لدية مشاعر قوية تعكس شعورة بعدم الاستقرار ومن أهم المشكلات المصاحبة للنمو الجنسى للمراهق هو ظهور حب الشباب والتهيجات الجلدية للمراهق والمراهقة، وكذلك المعاناه الجسيمة المصاحبة عند المراهقه مثل: الصداع، وآلام الظهر ونوبات تغير المزاج والاكتئاب.

النمو الحركى

ينتج عن النمو الجسمى السريع ميل الطالب إلى الكسل والخمول ويكون قليل النشاط والحركة ، والمراهقون فى بداية هذه المرحلة يكون توافقة الحركى غير دقيق وتتسم حركاته بعدم الاتزان وكثيرًا ما يصطدم بالأجسام التى تعترضه أو تسقط من بين يدية الأشياء التى يمسك بها، ومما يساعده على عدم استقراره الحركى تعرضه لنقد الكبار وتعليقاتهم وتحميله العديد من المسئوليات الاجتماعية، مما قد يسبب له الارتباك وفقدان الاتزان.

وعندما يصل المراهق إلى مرحلة النضج تصبح حركاته أكثر توافقًا وانسجامًا فيزداد نشاطه ويمارس التدريبات فى محاولة إتقان بعض المهارات الحركية التى تحتاج إلى دقة وتآزر حركى

النمو العقلى المعرفى

يختلف الذكاء فى سرعة نموه عن القدرات الطائفية الأخرى فنجد أن سرعة نمو الذكاء تبطئ خلال فترة المراهقة أما القدرات العقلية الأخرى مثل القدرة اللغوية والقدرة العددية والقدرة المكانية والقدرة الميكانيكية والقدرة الموسيقية تظل فى نموها المضطرد خلال فترة المراهقة وتزداد القدرة على التحصيل فى تلك المرحلة، حيث يميل المراهق إلى القراءة والاطلاع والرحلات الخارجية وقراءة القصص والمجلات فى محاولة للبعد عن المناهج الدراسية، ويحاول المراهق التعبير عن ذاته ونقدها عن طريق مذكراته، وكتابه المذكرات الخاصة علامة من علامات النمو العقلى والنمو الاجتماعى، وقد تكون وسيلة لتفريغ الانفعالات والهروب من القلق والضيق النفسى.

ومع نضج المراهق العقلى وتفاعله مع المجتمع بقيمة الخلقية والدينية يُكون المراهق لنفسه اتجاهًا أو فلسفة عامة، وبتفاعله مع البيئة التى يعيش فيها قد يصيبه النجاح أو الفشل، وقد يتعرض لصراع بين عقله النامى ومنطقة الجديد وبين ما تلقنه من تعاليم الآباء فى طفولته.

القدرات والعمليات المعرفية

تختلف القدرات عن العمليات المعرفية، فالقدرة هى ما يستطيع الفرد عمله أو القيام به بينما تتعلق العملية المعرفية بما يحدث فى العقل ذاته أو بما يدور فى العقل وهو يستجيب للمتغيرات المختلفة وعليه فإنه يمكن القول بإن القدرة تشمل على العمليات المعرفية وأنواع مثيراتها والأشكال المختلفة لاستجاباتها؛ ولذلك فإن القدرة تؤكد على الناحية العقلية البحته مثل القدرات الاستقرائية، والعمليات المعرفية التى تعتمد على القدرات العقلية هى الإنتباه الذى ينمو فى شدته ومستواه وطول مدته يستطيع المراهق استيعاب مشكلات طويلة معقدة فى سهولة ويسر، والإدراك الذى يتأثر بنمو الفرد الجسمى والعقلى والانفعالى والإجتماعى، فينمو من المستوى الحسى المباشر عند الطفل إلى المستوى المعنوى المجرد عند المراهق، وتنمو عملية التذكر وتنمو معها القدرة على الحفظ والاسترجاع والتعرف، والتذكر عند المراهق يعتمد على الفهم واستنتاج العلاقات بين العناصر التى يتم تذكرها ويتأثر تذكر الفرد للموضوعات المختلفة بدرجة ميله نحوها واستمتاعه بها وبانفعالاته وخبراته المختلفة وأيضا بنمو القدرة على الأنتبا.

أما عملية التفكير فإنها تتأثر عند المراهق بالبيئة المحيطة وبما تضمنه من متغيرات تحفزه إلى الوان مختلفة من الاستدلال وحل المشكلات، ويغلب على تفكير المراهق فى أول مرحلة المراهقة نمط التفكير الاستنباطى ثم يتطور نمو تفكيره ويتحول

إلى نمط التفكير الاستقرائى، تزداد قدرة المراهق على التخيل المجرد المبنى على الصورة اللفظية، كما تظهر القدرة المكانية لدى المراهق فى قدرته على فهم الأشكال الهندسية المختلفة وإدراك العلاقات المكانية فى سهولة تصور حركات الأشكال والمجسمات، أما القدرة العددية فتوضح فى القدرة على إجراء العمليات بسهولة وسرعة، هذا وتتجمع بعض هذه القدرات مع بعضها بنسب مختلفة لتؤلف من ذلك كله قدرات مركبة كالقدرة الرياضية التى تعتمد على القدرات الاستقرائية والاستنباطية والمكانية والعددية أو القدرة المنطقية التى تتألف من القدرتين الاستنباطية والاستقرائية، وتظل القدرات مطردة فى نموها خلال فترة المراهقة وفترة الرشد، ما عدا قدرة السرعة الادراكية فإنها تضعف فى أواخر مرحلة المراهقة وتظل فى انحدارها حتى الشيخوخة.

النمو الإنفعالى

ترتبط انفعالات الفرد بتغيرات عضوية داخلية يصاحبها مشاعر وجدانية وتغيرات فسيولوجية وكيميائية داخل الجسم، وتؤثر بيئة الفرد فى تلك الانفعالات، فهى بمثابة متغير لها، وللنمو أثر فى تغير وتطور الاستجابات للمثيرات، ولكن المظاهر الداخلية تكون أقرب للثبات والاستقرار منها إلى التغير، وتتسم مرحلة المراهقة أنها عنيفة فى حدة الإنفعالات، حيث نجد المراهق دائم الثورة على الأوضاع متمردًا على الكبار، كثير النقد، ويشعر المراهق بأن الأسرة والمدرسة والمجتمع لا تقدر موقفه، ولا تحس بإحساسه الجديد، لذا فهو يسعى دون قصد لأن يؤكد نفسه بثورته وتمرده وعناده.

النمو الإجتماعى

تميز العلاقات الاجتماعية فى مرحلة المراهقة بإنها أكثر تميزًا، وأكثر إتساعًا وشمولاً عنه فى مرحلة الطفولة، فينمو الفرد تزداد وتتسع افاق علاقاته الاجتماعية، وتستمر عملية التطبيع والتنشئة الاجتماعية، ومع بداية المرحلة المراهقة تزداد مجالات النشاط الاجتماعى، ويتنوع الاتصال الشخصى بالمعلمين والقادة والرفاق وغيرهم، وباتساع دائرة العلاقات والتفاعل الاجتماعى يتخلص المراهق من بعض جوانب الأنانية التى تطبع سلوكه فى مرحلة الطفولة فيحاول أن يأخذ ويعطى ويتعاون مع الآخرين وأثناء تفاعل المراهق وتعامله مع الآخرين تتأكد لديه مظاهر الثقة بالنفس وتأكيد الذات، ومحاولته إشعار الآخرين بأهميته كفرد له كيان مستقل، هذا ما يؤكد ميل المراهق للعناية بمظهره وملابسه وطريقة حديثة فنجده يتحدث كثيرًا عن نفسه وعن قدراته وتفوقه وفى مجالات التحصيل أو فى مجالات الرياضة.

إدراة وتنظيم بيئة التعلم النشط

تتمثل الإدارة الجيدة للمعلم لبيئة التعلم والتى تعتمد على مشاركة الطلاب فى التخطيط والتنفيذ للعملية التعليمية عاملاً مهمًّا على توفير الجهد والاستغلال الأمثل لموقف التعليم، وعنصرًا مهمًّا فى تحقيق الأهداف التعليمية المنشودة.

ومع ظهور الأساليب التربوية الحديثة التى تؤكد على ضرورة أن يكون الطالب هو محور العملية التعليمية وأن يكون له دورًا إيجابيًّا فى العملية التعليمية وبالتالى من المفضل إشتراكه فى إدارة هذه العملية، ومع التأكيد على دور التعلم النشط وهو ما أدى فى جملته إلى إدارة بيئة التعلم بتلك التغيرات التربوية، ومع مراعاة خصائص طلاب المرحلة الثانوية، حيث تختلف إدارة بيئة التعلم التى يتمركز فيها التعليم حول المتعلم، أو يقوم بدور فعال ويختلف فى إدارة بيئة التعلم، يتمركز فيها الأنشطة حوله مما يسمح له القيام ببعض الأعمال الإدارية داخل الفصل الدراسى، ويتطلب ذلك منح الطلاب بعض الحرية فى إدارة بيئة التعلم ذاتيًّا تحت توجية وإشراف المعلم، الأمر الذى يتطلب وضع مجموعة من القواعد العامة للتعامل داخل بيئة التعلم يتوفر بها الشروط التالية:

- ❑ ان تكون متوافقة مع قواعد وسياسات المدرسة وداعمه لها

  (مثل: الأهتمام بنظافة المكان – احترام المعلم – احترام الإدارة المدرسية – احترام الزملاء.....)
- ❑ ان تحدد مجموعة من الأسس التى يجب توافرها فى السلوك السوى للطلاب، ولن يدعم كل سلوك بمبررات عقلانية، بشكل يبين ضرورة هذا السلوك وفائدته لسير العمل فى الفصل بشكل إيجابى.
- ❑ ان تكون مقبوله من المعلم والطالب، وهذا يستلزم أن يتعاونا فى وضعها.

مكونات إدارة بيئة التعلم النشط

حين تكون إدارة بيئة التعلم عملية مشتركة بين المعلم والطلاب، فإن هذا يعنى ضرورة إعادة صياغة المعلم لأدواره، حيث يقوم بتعظيم دور المتعلم، وأن يصبح المعلم عضوًا فى جماعة أو قائدًا فى فريق أكثر من كونه المصدر الوحيد للسلطة.

إن بيئة التعلم النشط قد تكون حجرة الدراسة أو المعلم أو المكتبة أو حجرة الوسائط المتعددة أو غير ذلك، حيث يوجد الطلاب مع معلمهم يخططون وينفذون معًا عددًا من الأنشطة التربوية، ومن ثم فإن مكونات بيئة التعلم تتمثل فيما يلى:

- ❑ التخطيط الجيد لتحديد خطوات وطريقة تنفيذ العملية التعليمية
- ❑ التنظيم المادى للفصل لمجابهة إحتياجات العملية التعليمية
- ❑ تحديد اساليب أو طرق التفاعل بين المعلم والطلاب.
- ❑ تهيئة مناخ الفصل لمجابهة احتياجات الطلاب لتحقيق الأهداف المنشودة
- ❑ ضبط سلوك الطلاب.
- ❑ استغلال البيئة المحيطة أفضل استغلال لإحداث عملية التعليم / التعلم الجيد.
- ❑ الاستغلال الأمثل للوقت لتحقيق اكبر وقت ممكن للتعليم.
- ❑ وتحدد هذه المكونات الجوانب التى يجب أن يركز عليها المعلم عند وضعه تصورًا لإدارة فصله بما يضمن له النجاح فى مهمته.

السمات والمهارات اللأزمة لإدارة بيئة التعلم النشط

يتطلب نجاح المعلم فى قيادته التربوية لبيئة التعلم النشط إلى توافر مجموعة من السمات والمهارات الأساسية وهى كلها لازمة لنجاح المعلم بدرجات متفاوته ومنها:

السمات الشخصية: وتشمل المبادأه، الثقة بالنفس، والقدرة على الإبتكار، وتحمل المسئولية، ضبط النفس، الحزم والسرعة فى اختيار البدائل

المهارات الفنية: وهى المعرفة المتخصصة فى فرع من فروع العلم والكفاءة فى استخدام هذا الفرع بما يحقق الهدف المنشود، وتكتسب هذه المهارات بالدراسة والخبرة والتدريب

مهارات اجتماعية وتعنى قدرة المعلم على التعامل مع طلابه وتنسيق جهودهم، وخلق روح العمل الجماعى بينهم، وايضا قدرته على الارتفاع والتأيثر ومواجهة المشاكل والتصدى لها بأسلوب ناجح.

تنظيم بيئة التعلم النشط

تحتاج إدارة بيئة التعلم إلى عناية فائقة من المعلم للتنظيم والتخطيط والترتيب، ويعد الفصل وترتيبه أحد العوامل الرئيسية لنجاح عمل المعلم لتحقيق أهداف التعلم النشط، ولذلك يجب على المعلم أن يراعى عدد من النقاط الهامة وهى:

(١) **المرونة:** وتعد حجر الزاوية فى تنظيم الفصل؛ لأنه مهما نظم المعلم فصله فسوف يتم تعديله عند التطبيق ليناسب احتياجات الطلاب واستراتيجيات التدريس المستخدمة.

(٢) **نوع الانشطة:** يجب أن يضع المعلم فى اعتباره أن النشاط الذى سوف يقوم به الطلاب هو الذى يحدد شكل الفصل وترتيب مقاعد الطلاب وحركاتهم مثل: التعلم الفردى – التعلم التعاونى – تعلم الأقران وهكذا

(٣) **تنظيم الاثاث والمواد والأدوات:** تنظيم الفصل للتعلم النشط يعنى تنظيم المكان حتى يمكن للطلاب العمل بمفردهم أو فى مجموعات كبيرة، و إن أمكن يستخدم أثاثًا سهل الحركة حتى يمكن إعادة ترتيبه.

(٤) **المصادر التعليمية:** يجب ان يحتوى جزء من الحجرة على المصادر التعليمية وتكون مناسبة للطلاب من حيث المستوى العمرى وتحدى قدراتهم

(٥) **مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب:**

إدارة وقت التعلم بفاعلية

أن التخطيط لإدارة الوقت بمثل عاملاً مهمًا فى التعليم داخل الفصل وهنا التخطيط يمر بالخطوات التالية:

- ✍ دراسة استطلاعية للوقوف على كيفية استغلال الوقت ويدخل فيها دراسة السجلات المختلفة الخاصة بالتدريس والأنشطة.
- ✍ تحديد الأهداف المستهدفة بدقة.
- ✍ تحديد الأولويات والمهام اللازم تنفيذها.
- ✍ وضع خطة للعمل يحدد فيها الوقت اللازم لكل مهمة من المهام فى ضوء الأهداف والأولويات .
- ✍ متابعة تنفيذ الخطة وتقويم الأداء.
- ✍ تنفيذ هذه الخطة وفق جدول زمن محدد.
- ✍ تبنى اساليب وحلول لمواجهة مشكلات الوقت.

وتشير هنا إلى أن التخطيط لدرس ما لابد أن يرافقه زمن كل مرحلة من مراحل التدريس، وعلى المعلم أن ينجز خطته تبعًا للزمن المحدد، ولكى يحسن المعلم من إدارة وقته داخل الصف ينبغى عليه أن يقوم بالآتى:

- ✍ الإلتزام بوقت الحصة من حيث توقيت بدايتها وتوقيت نهايتها.
- ✍ تحليل المشكلات التى يمكن أن تواجه المعلم أثناء الحصة وتستنفذ وقتها واسبابها وكيفية علاجها.
- ✍ التخطيط الجيد لدرسة حيث يساعده ذلك على إدارة الفصل بفاعلية واستثمار وقت الحصة.

بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى

يهدف الاختبار التحصيلى إلى تحديد مقدار ما اكتسبه أو تعلمه المتعلم، الأمر الذى يسمح بمقارنه مستوى تحصيل الطالب بمستوى تحصيل غيره من الطلاب الذين طبق عليهم نفس الاختبار ولبناء الاختبار التحصيلى عدة خطوات:

- ❑ تحديد الأهداف (النواتج) التى يهدف المقرر إلى تحقيقها.
- ❑ تحديد محتوى الاختبار (أى الموضوعات التى يغطيها الاختبار) فى ضوء الأهداف التى يسعى الاختبار إلى تحقيقها، ومن وسائل تحقيق ذلك عمل جدول ثنائى يطلق عليه جدول المواصفات، وهو جدول ثنائى يتضمن الموضوعات التى يجب ان يغطيها الاختبار، والأهداف التعليمية للمقرر الدراسى (نواتج التعلم)، والأهمية النسبية (الوزن النسبى للموضوعات والأهداف). واستخدام جدول المواصفات يزيد من احتمالية تمثيل الاختبار للجوانب الهامة للمقرر الدراسى، ونسب تمثيلها للأهداف المنشودة، الأمر الذى يرفع من صدق هذا الاختبار، كما أن استخدام هذا الجدول يعمل كموجة للمعلم فى اختيار الافكار التى يجب ان يتضمنها الاختبار.

خطوات إعداد جدول المواصفات

- ❑ تحديد الأهداف التعليمية للمقرر الدراسى والأوزان النسبية لكل منها والتى تعكس الاهتمام الذى تخطى به فى عملية التدريس، وتكتب أعلى اعمدة جدول المواصفات؛ أى توضع أعلى الجدول.
- ❑ تحديد موضوعات المقرر الدراسى، ونسبة تمثيل كل منها، ولكى يتسنى للمعلم أو معد الاختبار تحديد الأوزان النسبية أو نسبة تمثيل موضوعات المقرر الدراسى يمكنه الاستعانة بالموجهات التالية:
- ❑ الزمن المخصص لتدريس كل موضوع من موضوعات المقرر الدراسى.
- ❑ مدى الاهتمام الذى يحظى به الموضوع فى عملية التدريس.
- ❑ خبرة المعلم الشخصية فى تدريس المقرر الدراسى وتحليل لمحتواه.
- ❑ الاستشارة العلمية.

وبعد تحديد الموضوعات التى يتضمنها المقرر الدراسى، والأوزان النسبية لكل منها تكتب هذه الموضوعات امنيًا على صنوف الجدول، وينشأ عن تقاطع الأعمدة التى تمثل الأهداف، والصفوف التى تمثل الموضوعات عدد معين من خلايا (الخانات) التى تحدد وتعكس درجة تمثيل كل موضوع من موضوعات المحتوي فى علاقته بكل هدف من الأهداف.

التى تحدد بدورها نسبة الأسئلة أو عدد الأسئلة التى يجب أن يتضمنها الاختبار بالنسبة لكل موضوع من موضوعات المحتوى فى علاقته بكل هدف من الأهداف، والوزن النسبى المحدد لكل موضوع من موضوعات المحتوى، ولكل هدف من الأهداف فى جدول المواصفات يدل على النسبة المئوية الكلية المخصصة لكل منها بأسئلة الاختبار ولتحديد الأهمية النسبية لكل خلية من

خلايا جدول المواصفات يتم اتباع الخطوات التالية:

- يتم تحديد وضع الخلية.
- يتم تحديد الصف (الموضوع) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للصف، (نفترض ان هذه النسبة تساوى ٢٣٪)
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود (الهدف) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود (نفترض ان هذه النسبة تساوى ١٤٪).
- يتم ضرب قيمة النسبة المئوية للصف (٢٣٪) فى قيمة النسبة المئوية للعمود (١٤٪)

ويمثل الناتج نسبة الأسئلة (او عدد الأسئلة) التى تمثل الخلية والتى يجب ان يتضمنها الاختبار، وفى هذه الحالة تساوى٢٢,٣٪ من مجموع مفردات الاختبار ككل وإذا افترضًا أن المجموع الكلى لعدد مفردات الاختبار يساوى ١٠٠ فإن ٢٢,٣٪ فى هذه الحالة تساوى ٣ مفردات أو أسئلة تقريبا، وتجدر الإشارة إلى انه عندما يكون ناتج ضرب قيمة النسبة المئوية لعمود فى قيمة النسبة المئوية للصف المقابل لنقطة تقاطع خلية معينة عدد صحيح وكسر، فإنه يجب جبر هذا الكسر لأقرب رقم صحيح وذلك يعد اتباع قواعد التقريب المعروفة.

وفيما يلى نموذج لجدول مواصفات اختبار تحصيلى لمقرر الرياضيات للفصل الدراسى الأول

أولاً: الجبر وحساب المثلثات

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
الجبر	٠,٠٦	٠,١٢	٠,٢٤	٠,٠٦	٠,٠٦	٠,٠٦	٦٠٪
حساب المثلثات	٠,٠٤	٠,٠٨	٠,١٦	٠,٠٤	٠,٠٤	٠,٠٤	٤٠٪
المجموع	١٠٪	٢٠٪	٤٠٪	١٠٪	١٠٪	١٠٪	١٠٠٪

إذا كان عدد مفردات الاختبار هو ١٤ مفردة فيكون عدد المفردات فى كل خلية كما هو موضح في الجدول التالى

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
الجبر	١	٢	٣	١	١	١	٩
حساب المثلثات	$\frac{1}{2}$	١	٢	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٥
المجموع	$1\frac{1}{2}$	٣	٥	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	١٤

ثانيا الهندسة

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
التشابه	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٠٥	٠,٠٥	٠,٠٥	٥٠٪
نظريات التناسب	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٠٥	٠,٠٥	٠,٠٥	٥٠٪
المجموع	١٠٪	٢٠٪	٤٠٪	١٠٪	١٠٪	١٠٪	١٠٠٪

إذا كان عدد مفردات الاختبار هو ١٤ مفردة فيكون عدد المفردات فى كل خلية كما هو موضح في الجدول التالى

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
التشابه	١	١	٢	١	١	١	٧
نظريات التناسب	١	١	٢	١	١	١	٧
المجموع	٢	٢	٤	٢	٢	٢	١٤

أولا الجبر وحساب المثلثات

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
الجبر	٠,٠٥٥	٠,١١٠	٠,٢٢	٠,٠٥٥	٠,٠٥٥	٠,٠٥٥	٪٥٥
حساب المثلثات	٠,٠٤٥	٠,٠٩٠	٠,١٨	٠,٠٤٥	٠,٠٤٥	٠,٠٤٥	٪٤٥
المجموع	٪١٠	٪٢٠	٪٤٠	٪١٠	٪١٠	٪١٠	٪١٠٠

إذا كان عدد مفردات الاختبار هو ١٤ مفردة فيكون عدد المفردات فى كل خلية كما هو موضح في الجدول التالى

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
الجبر	١	١	٣	١	١	١	٨
حساب المثلثات	$\frac{١}{٢}$	١	٣	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٦
المجموع	$١\frac{١}{٢}$	٢	٦	$١\frac{١}{٢}$	$١\frac{١}{٢}$	$١\frac{١}{٢}$	١٤

ثانيا الهندسة

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
المتجهات	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٠٥	٠,٠٥	٠,٠٥	٪٥٠
الخط المستقيم	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٠٥	٠,٠٥	٠,٠٥	٪٥٠
المجموع	٪١٠	٪٢٠	٪٤٠	٪١٠	٪١٠	٪١٠	٪١٠٠

إذا كان عدد مفردات الاختبار هو ١٤ مفردة فيكون عدد المفردات فى كل خلية كما هو موضح في الجدول التالى

الأهداف/ الموضوعات	تذكر	فهم	تطبيق	تحليل	تركيب	تقويم	المجموع
المتجهات	$\frac{١}{٢}$	٢	٣	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٧
الخط المستقيم	$\frac{١}{٢}$	٢	٣	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٧
المجموع	١	٤	٦	١	١	١	١٤

ويلاحظ أنه بعد تحديد جدول مواصفات الاختبار، نكتب مفردات الاختبار فى ضوء كل من الموضوع والمستوى المعرفى فى كل خلية من خلايا الجدول مع اختيار أنماط الأسئلة الملائمة لقياس هذه المستويات وذلك كما هو موضح بالاختبارات المرفقة فى نهاية كل فصل دراسى بكراسة التدريبات والأنشطة.

المراجع:

- وليم عبيد وآخرون، تربويات الرياضيات، القاهرة، الانجلو المصرية، ٢٠٠٥، ص ص ٧ - ٢٨
- وليم عبيد، قصة الرياضيات، القاهرة، المكتبة الأكاديمية، الطبقة الأولى، ٢٠٠١، ص ص ١٥ - ١٧
- محمد أمين المفتى، الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات، ورقة مقدمة للمواتمر العلمى السنوى بعنوان "الرياضيات المدرسية معايير ومستويات"، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، القاهرة، ٢٠٠١
- على ماهر خطاب، القياس والتقويم فى العلوم النفسية والتربوية والاجتماعية، الطبعة السابعة، القاهرة، الانجلو المصرية، ٢٠٠٨

الفصل الدراسى الأول

الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال

Algebra, relationships and functions



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جَذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين).
- يحل متباينات من الدرجةالثانية فى مجهول واحد.

المصطلحات الأساسية

- معادلة Equation
- جذر المعادلة Root of the Equation
- معامل الحد Coefficient of a Term
- مميز المعادلة Discriminant of the Equation
- إشارة دالة Sign of a function
- عدد مركب Complex Number
- عدد تخيلى Imaginary Number
- قوى العدد Powers of a Number
- متباينة Inequality

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب التمثيل البيانى للدالة التربيعية وحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا، وسوف يدرس في هذه الوحدة المعادلات التربيعية من خلال التعرف على مجموعة الأعداد المركبة التى تعد توسيعًا لمجموعة الأعداد الحقيقة ح، وذلك من خلال دروس بيانها كالآتي:

الدرس الأول: حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.

الدرس الثاني: مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس الثالث: تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

الدرس الرابع: العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

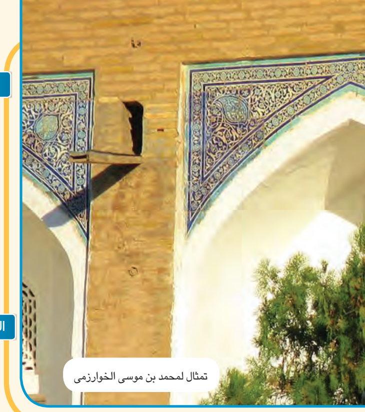
الدرس الخامس: إشارة الدالة.

الدرس السادس: متباينات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

أهداف الوحدة

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يحدد نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.


تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمى

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد.

الدرس (١ - ٢): مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس (١ - ٣): تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

الدرس (١ - ٤): العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

الدرس (١ - ٥): إشارة الدالة.

الدرس (١ - ٦): متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلى - برامج رسومية - بعض المواقع الإلكترونية مثل:
www.phschool.com

نبذه تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمى (القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة العباسى المأمون) فى كتابه الذى ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذى وضع فيه طرقًا أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمى هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد تُرجْم الكتاب إلى اللغات الأوربية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

والجذر هو الذى نرمز له حاليًا بالرمز س (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمى حلولًا هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التى تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذى اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة.

وجدير بالذكر أنه ظهر فى بردية أحمس (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التى يشير حلها إلى أن المصريين فى ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حاليًا إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم - أبناءنا الطلاب- فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتى حمل علماؤنا فيها لواءَ التقدم ومشاعلَ المعرفة إلى العالم شرقًا وغربًا.

مخطط تنظيمي للوحدة

الجبر والعلاقات والدوال
دالة الدرجة الثانية فى متغير واحد
معادلات الدرجة الثانية
المميز ($ب^2 - 4أجـ$)
العلاقة بين جذرى المعادلة
موجب
سالب
يساوي صفر
يوجد جذران حقيقيان مختلفان
لا توجد جذور حقيقة
يوجد جذران حقيقيان متساويان
مجموعة الأعداد المركبة
خواص العمليات
تساوى عددين مركبين
العددان المترافقان
بحث إشارة الدالة
الثابتة
التربيعية
الخطية
حل متباينة الدرجة الثانية فى متغير واحد
مجموع الجذرين
حاصل ضرب الجذرين
تكوين المعادلة التربيعية
تطبيقات عامة
حياتية
فيزيائية
كهربية
استخدام التكنولوجيا
حاسبة علمية
برامج للحاسوب رسومية

بمعلومية معاملات حدودها.

- يكون معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة.
- يتعرف مقدمة في الأعداد المركبة.
- يحل متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

زمن تدريس الوحدة

١٦ ساعة

الوسائل التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلى - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة - العصف الذهنى - المحاضرة- الطريقة الاستقرائية - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الناقد - التفكير التحليلى - حل المشكلات - التفكير المنطقي - التفكير الإبداعى فى الرياضيات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الدرس والأسئلة المتضمنة في بند "حاول أن تحل" كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة في بند "تحقق من فهمك" في نهاية كل درس والأسئلة المتضمنة فى كل من التمارين العامة للوحدة واختبار الوحدة والاختبار التراكمى.

١ - ١

حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

خلفية

سبق أن تعلم الطالب حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد في ح، وفي هذا الدرس سوف يستخدم الآلة الحاسبة برامج الحاسوب في رسم الدالة التربيعية؛ لتحديد إمكانية حل المعادلة التربيعية في ح.

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.
- يميز بين المعادلة والعلاقة والدالة.
- يحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.
- يتحقق من صحة حل معادلة جبرية.

مفردات أساسية

معادلة – علاقة – دالة – متغير – ثابت – عامل – معامل

المواد التعليمية المستخدمة

آله حاسبة علمية – برامج رسومية – برامج حاسوب

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى – معمل الحاسب الآلي

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٤ إلى صفحة ٨

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢ إلى صفحة ٤

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- راجع من طلابك مفهوم المعادلة ودرجتها، ثم حلها وأعرض الأمثلة التالية:

١ - ١

حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

سوف تتعلم

- مفهوم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.
- التمييز بين المعادلات والعلاقات والدوال.
- حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلة Equation
- علاقة Relation
- دالة Function
- عامل Factor
- معامل Coefficient

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق رسم بيانى

فكر و ناقش

سبق أن درست المعادلات الجبرية فى متغير واحد، وفي هذا الدرس سوف تدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

والآن سوف نستعرض ما سبق لك دراسته من المعادلات الجبرية ذات المتغير الواحد.

١- تسمى المعادلة: أ س + ب = ٠ حيث أ ≠ ٠ بأنها معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد هو س (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو العدد ١)

٢- تسمى المعادلة: $\text{أس}^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد هو س (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو العدد ٢)

وعلى ذلك فالمعادلة: $٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥ = ٠$ تسمى معادلة من الدرجة الثالثة. (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو ٣).

المعادلات والعلاقات والدوال Equations, relations and functions

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبريًّا كالتالى، بطريقتين:

أولًا: بتحليل المقدار $\text{أس}^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ ٠ (إذا كان ذلك ممكنًا فى ح).

ثانيًا: باستخدام القانون العام، ويكون جذرا المعادلة $\text{أس}^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ هما:

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$ حيث أ معامل $\text{س}^{٢}$، ب معامل س، جـ الحد المطلق.

والآن سوف تدرس حل معادلة الدرجة الثانيةبيانيًّا.

تعلم

حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا

Solving quadratic equation graphically

مثال

١ حل المعادلة: $\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦ = ٠$ بيانيًّا، ثم تَحقَّقْ من صحة الحل.

الحل

لحل المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦ = ٠$ بيانيًّا نتبع الآتي:

★ نرسم الشكل البياني للدالة د حيث $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + \text{س} - ٦$

٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

أوجد درجة كل معادلة من المعادلات الآتية:

أ $\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٤ = ٠$

ب $\text{س}^{٥} - ٣\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} + ١ = ٠$

جـ $٢\text{س}^{٧} - ٣\text{س}^{٣} - ٤\text{س} = ٠$

د $\text{س}^{٩} - ٥١٢ = ٠$

- ذكر الطلاب بأنه عند حل المعادلة التى على الصورة

$\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ حيث أ ≠ ٠

فإننا نتبع الخطوات التالية:

- التحليل إلى العوامل: إذا كانت المعادلة على الصورة: $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} = ٠$
- خاصية الجذر التربيعى: إذا كانت المعادلة على الصورة $(\text{س} \pm \text{ل})^{٢} = \text{ب}$
- إكمال المربع: إذا كانت المعادلة على الصورة: $\text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$
- استخدام القانون العام: وذلك عندما لا نستطيع استخدام أى من الطرق السابقة.

★ نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هى مجموعة حل المعادلة.

لرسم الدالة د (س) = ص، ص = س^{٢} + س − ٦

ننشىء جدولًا لبعض قيم س، ثم نوجد قيم ص المناظرة لها كالآتي:

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	−٤	−٦	−٦	−٤	٠	٦

★ نعين هذه النقاط فى المستوى الإحداثى المتعامد، ونصل بينهما بمنحنى كما فى الشكل المجاور.

ومن الرسم نجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات وهى س = − ٣، س = ٢ وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة س^{٢} + س − ٦ = ٠ هى {−٣، ٢}.

يمكنك استخدام الحل الجبرى لكى تطابقه مع الحل البيانى كالآتى:

المعادلة: س^{٢} + س − ٦ = ٠

تحليل المقدار الثلاثى: (س + ٣)(س − ٢) = ٠

إما س + ٣ = ٠ أو س − ٢ = ٠

أى س = −٣ أو س = ٢ مجموعة ا لحل هى {− ٣، ٢}

تذكر
إذا كان أ، ب أعدادًا حقيقية
وكان أ × ب = ٠
فإن: أ = ٠ أو ب = ٠

التحقق من صحة الحل:

عندما س = − ٣: الطرف الأيمن للمعادلة = (− ٣)^{٢} + (− ٣) − ٦

= ٩ − ٣ − ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = − ٣ تحقق المعادلة.

عندما س = ٢ : الطرف الأيمن للمعادلة = (٢)^{٢} + (٢) − ٦

= ٤ + ٢ − ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = ٢ تحقق المعادلة.

لاحظ أن:

١- فى التمثيل البيانى للعلاقة السابقة ص = س^{٢} + س − ٦

- العلاقة تمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة.
- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المدى هو [− ٦$\frac{١}{٤}$، ∞[

٢- للتعبير عن الدالة يستخدم الرمز د(س) بدلًا من ص، ويُقرأ دالة س.

أضف إلى معلوماتك
اختبار الخط الرأسي
Vertical line test
دالة
الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة فقط
ليست دالة
الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطتين أو أكثر



- **التمثيل البيانى:** عند رسم منحنى الدالة يدويًّا نستخرج نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات، فنحصل على حلول تستخدم للتحقق من صحة الحل الجبرى. ونلاحظ أنه عند استخدام الحاسبة الرسومية أو أحد برامج الحاسوب نحصل على حل دقيق.

عرض الدرس

تعلم: حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا

بين لطلابك أنه عند حل المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ بيانيًّا فإننا نتبع الخطوات التالية:

- نضع المعادلة على صورة الدالة د حيث د(س) = ٠، د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ.
- نوجد مجموعة الأزواج المرتبة (س، ص) التى تحقق بيان الدالة.
- نرسم منحنى الدالة، ثم نعين نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (ص = ٠)، فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هى مجموعة حل المعادلة.

التقييم المستمر

أثناء عرض الدرس اسأل طلابك: كيف يمكن تحديد ما إذا كانت العلاقة المرسومة تمثل دالة أم لا؟ وذلك من خلال اختبار الخط الرأسى، وذكرهم بتعريف مجال الدالة ومداها، وأن مدى الدالة هو مجموعة جزئية من المجال المقابل لها.

درب طلابك على كيفية استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إنشاء جدول لإيجاد قيم للمتغيرين س، ص، من خلال المثال الموضح صفحة (٦) من كتاب الطالب.

في بند تفكير ناقد صفحة (٦)

ذكر طلابك بالفرق بين العلاقة والدالة، وأن كل علاقة ليست دالة، فمثلًا: ص^{٢} = ٩ − س^{٢} علاقة، وليست دالة، بينما ص = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ دالة محددة بمجال ومجال مقابل وقاعدة. وتصبح الدالة د معادلة عندما تكون د(س) = ٠

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل ص (٦)

مجموعة حل المعادلة هو هى {−٢، ٢}؛ أى أن للمعادلة جذرين حقيقيَّن مختلفين والعلاقة ص = س^{٢} − ٤ تعبر عن دالة مجالها ح ومداها [−٤، ∞[و يمكنك استخدام اختبار الخط الرأسى لبيان أن هذه العلاقة دالة، كما يمكن استخدام الحل الجبرى بوضع أى قيمة للمتغير س توجد قيمة وحيدة للمتغير ص.

تدريب إضافى:

(١) بسط كل مماياتى :

أ ٦ (٣ س − ٢ ص) + ٣ (٥س + ٤ ص)

ب −٢ (٣س − ص) + ٢ (٢ ص + ٥ س)

جـ ٥ (٢ س − ص) + ٣ (٤ س + ٢ ص)

(٢) حل كل معادلة من مايأتى بيانيًّا، ثم تحقق من صحة الحل:

أ س^{٢} + ٧س + ١٢ = ٠

ب س^{٢} + ٤س − ٥ = ٠

جـ س^{٢} + ٧س + ٦ =٠

تطبيقات إضافية للطلاب الفائقين:

يمكنك إعطاء تطبيقات إضافية على حركة المقذوفات كالآتي:

(١) سقط جسم من سكون (ع = ٠) من ارتفاع ٤٩٠ مترًا عن سطح الأرض. احسب الفترة الزمنية ن بالثانية التي يستغرقها الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض، علمًا بأن المسافة ف تساوي ٤٩٠ مترًا، والعلاقة بين ف، ن هي : ف = ع ن + ٤,٩ ن^{٢}

[الإجابة: ن = ١٠ ثوانٍ]

(٢) أطلقت قذيفة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ع تساوى ٢٤,٥ متر/ث. احسب الفترة الزمنية ن بالثانية، التي تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا، حيث ف تساوي ٢٩,٤ مترًا، علمًا بأن العلاقة بين ف، ن تعطى كالآتي:

ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}

[الإجابة: ن = ٢ ثانية والقذيفة صاعدة لأعلى حتى تصل إلى نقطة ما، ن = ٣ ثانية والقذيفة هابطة مارة بنفس النقطة.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صـ٧

(٢) بوضع ف = ٠ تكون : −٤,٩ن^{٢} + ٢,٤٥ن + ٩,٨ = ٠

أى : ٢ن^{٢} − ن − ٤ = ٠ ومنها

ن = ١,٦٩ ثانية

أو ن = −١,١٩ (الزمن السالب مرفوض)

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك صـ٨

(١) ١٣٦ = $\frac{ن}{٢}$(١ + ن)

أى: ن^{٢} + ن − ٢٧٢ = ٠

ن = ١٦

أو ن = −١٧ مرفوض.

استخدام الآله الحاسبة العلمية:

يمكن تكوين الجدول السابق مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة العلمية على النحو الآتى:

١- **تهيئة الحاسبة على نظام** (Table)، وذلك بالضغط على المفاتيح

TABLE 7 Mode ← إبدأ

٢- **إدخال البيانات**: نكتب قاعدة الدالة السابقة، وذلك بالضغط على المفاتيح التالية:

ALPHA) [X] x^2 + ALPHA) [X] − 6 ← إبدأ

٣- نضغط على المفتاح = ثم نكتب فى بداية الفترة START? -4 ثم نضغط =

٤- ثم نكتب فى نهاية الفترة END الرقم 3 ثم نضغط = نحدد بعد ذلك طول الفترة STEP ونكتب الرقم 1 ثم نضغط =

٥- يتم إنشاء الجدول فى الحاسبة، ويمكن التنقل باستخدام المفتاح REPLAY إلى أعلى و إلى أسفل.

للخروج من البرنامج: نضغط Mode 1 ← إبدأ

	X	F(X)
1	-4	6
2	-3	0
3	-2	-4
4	-1	-6
5	0	-6
6	1	-4
7	2	0
8	3	6

تفكير ناقد: ١- هل كل دالة علاقة؟ فسِّر ذلك بأمثلة.

٢- هل يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات؟ فسِّر ذلك.

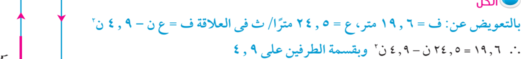
حاول أن تحل

(١) مثل العلاقة ص = س^{٢} − ٤ بيانيًّا، ثم أوجد من الرسم مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٤ = ٠
و إذا كانت ص = د(س) فبيِّن أنَّ د دالة، وحدِّد مجالها ومداها [ناقش معلمك].

مثال

(٢) الربط بالفيزياء: أطُلْقت قذيفة رأسيًّا بسرعة ع تُساوى ٢٤,٥ متر/ث. احسبْ الفترة الزمنية ن بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا، حيث ف تساوى ١٩,٦ مترًا، علمًا بأن العلاقة بين ف، ن كالآتى:
ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}.

الحل



بالتعويض عن: ف = ١٩,٦ متر، ع = ٢٤,٥ مترًا/ ث فى العلاقة ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}

∴ ١٩,٦ = ٢٤,٥ ن − ٤,٩ ن^{٢} وبقسمة الطرفين على ٤,٩

∴ ٤ = ٥ن − ن^{٢} بالتبسيط

∴ ن^{٢} − ٥ن + ٤ = ٠ بتحليل المقدار الثلاثى.

∴ (ن − ١) (ن − ٤) = ٠ أى أن: ن = ١ ثانية أو ن = ٤ ثانية.

تفسير وجود جوابين: القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٩,٦ مترًا بعد ثانية واحدة، ثم تستمر فى الحركة لأعلى حتى تصل لأقصى ارتفاع، ثم تعود إلى نفس الارتفاع مرة أخرى بعد ٤ ثوانٍ من لحظة إطلاقها.



٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين:

سكان: يقدر عدد السكان في جمهورية مصر العربية بعد عام ٢٠١٣ بالعلاقة: ع = ن^{٢} + ١,٢ن + ٩٢، حيث ع عدد السكان بالمليون، (ن) عدد السنوات بعد عام ٢٠١٣.

(أ) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣؟

(ب) احسب تقدير عدد السكان عام ٢٠٢٣؟

(جـ) احسب أقرب عدد من السنوات التى يبلغ بعدها عدد السكان ٣٣٥ مليونًا.

الإجابة

بالتعويض عن ن = ٠ ، عدد السكان ٩٢ مليون

بالتعويض عن ن = ١٠ ، عدد السكان ٢٠٤ مليون

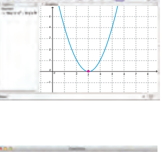
بوضع ع = ٣٣٥ عدد السنوات = ١٥ سنة

حاول أن تحل

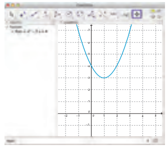
٢ **الربط بالألعاب الرياضية:** فى إحدى الألعاب الأولمبية قفز متسابق من منصة ارتفاعها ٩,٨ أمتار عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عنها، فإذا كان ارتفاع المتسابق عن سطح الماء ف مترًا بعد زمن قدره ن ثانية يتحدد بالعلاقة: ف = −٤,٩ن^{٢} + ٤٥,٢ن + ٩,٨ ، فأوجد لأقرب رقمين عشريين متى يصل المتسابق لسطح الماء؟

نشاط

يمكن استخدام بعض البرامج المتاحة التى تدعم اللغة العربية من على شبكة الإنترنت مثل GeoGebra وموقعه هو (http://geogebra.org/coms/)،وبرنامج Graph وموقعه هو (http://www.padowan.dk/) التى من خلالها يمكن رسم منحنى الدالة.



أ يمكن رسم منحني الدالة د حيث
د (س) = س^{٢} + ٤س + ٣
نوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ أى س^{٢} + ٤س + ٣ =٠
وذلك من خلال تعين الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات، وهى −٣، −١ لتكون حلًّا للمعادلة؛
ولذلك يكون هناك حلَّان للمعادلة فى ح هما −٣، −١



ب نرسم الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٦س + ٩
نضع د (س) = ٠ فيكون (س − ٣)^{٢} = ٠
أي س −٣ = ٠ فيكون حل المعادلة س = ٣
ومن الرسم نجد أن رأس المنحنى يمس محور السينات عند س = ٣
وهذا يطابق الحل الجبري؛
لذلك يوجد حل وحيد مكرر للمعادلة فى ح هو ٣

جـ نرسم الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٢س + ٤ ثم نضع د(س) =٠
فيكون س^{٢} − ٢س + ٤ = ٠
ويتعذر حل هذه المعادلة بالتحليل وعند استخدام القانون العام
س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$
بالتعويض عن أ = ١، ب = −٢، جـ = ٤
∴ س = $\frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$
= $\frac{٢ \pm ٢\sqrt{-٣}}{٢}$ = ١ ± $\sqrt{-٣}$ ∉ ح

التقييم

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح بالطريقة الجبرية، ثم تحقق من الحل باستخدام الحاسبة العلمية:

أ س^{٢} + ٥ − ٦ = ٠
ب ٢س^{٢} − ٧س + ٦ = ٠
جـ ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ = ٠

التقييم المستمر

في حصة المعمل للحاسب الآلى درب طلابك على استخدام برامج الحاسوب الرسومية مثل برنامج Geogebra أو برنامج Graph فى رسم الدوال التربيعية، وذلك بكتابة قاعدة الدالة في المكان المخصص لها مع تحديد مجال الدالة؛ (وذلك بكتابة نقطة بدايتها ونقطة نهايتها)، مع تدريبهم على بعض المؤثرات في الرسم مثل الخلفية ولون وسمك محاور الإحداثيات وحجم خط الكتابة إلى غير ذلك.

تجنب الخطأ:

وضح لطلابك بأنه يمكن تمثل الدالة د بيانيًّا، ولكن معادلة الدرجة الثانية تمثل على خط الأعداد بنقطتين أو نقطة وحيدة، كما لا يمكن تمثيلها على خط الإعداد إذا كانت مجموعة الحل ϕ.

نشاط: التمثيل البيانى لدالة الدرجة الثانية:

- قسم الفصل إلى مجموعات تبعًا لعدد الحواسب الآلية بالمعمل المدرسى، ثم اطلب إليهم تمثيل بعض الدوال التربيعية بحيث تتنوع هذه الدوال من حيث عدد حلولها أو أن لايكون للدالة حلًّا في ح.
- ثم اطلب إليهم حل كل معادلة من المعادلات المعطاة باستخدام القانون العام، ثم مقارنة الحل الجبرى مع الحل البيانى، ومن ثم توصل معهم إلى الاستنتاج الآتى:

عند حل المعادلات التربيعية فإنه:

- يوجد حلان مختلفان للمعادلة، ويعبر عنهما بيانيًّا بنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات.

- يوجد حل وحيد للمعادلة ويعبر عن ذلك بيانيًّا بأن المنحنى يمس محور السينات.
- لاتوجد حلول للمعادلة في ح، ويعبر عن ذلك بيانيًّا بأن منحنى الدالة لايمس محور السينات.

أنشطة إضافية للطلاب:

مثل كل من منحنيات الدوال الآتية بيانيًّا باستخدام إحدى برامج الحاسوب، ثم أوجد مجموعة الحل لكل معادلة منها عندما د(س) = ٠

(١) د(س) = س^{٢} – ٣س + ٥

(٢) د(س) = –س^{٢} + ٨س – ١٦

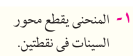
(٣) د(س) = س^{٢} – ٧س + ٦

لذلك لا توجد حلول حقيقية تُحقق هذه المعادلة، ويؤكد ذلك، رسم الشكل البياني للدالة فنجد أن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات في أي نقطة؛ لذلك فإن مجموعة حل المعادلة في ع هو ϕ .

نستنتج من النشاط السابق أن :

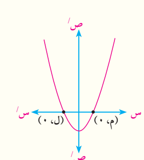
عند حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد توجد ثلاث حالات:

١- المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين.



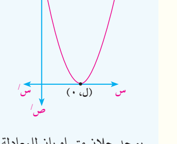
يوجد حلَّان مختلفان للمعادلة في ع، مجموعة الحل = {ل، م}

٢- المنحنى يمس محور السينات في نقطة واحدة.



يوجد حلان متساويان للمعادلة في ع، مجموعة الحل = {ل}

٣- المنحنى لا يقطع محور السينات.



لايوجد حلٌّ للمعادلة في ع، مجموعة الحل = ϕ

تحقق من فهمك

(١) حل مشكلات: إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ +..... + ن) يعطى بالعلاقة جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا ١٣٦

١ - ٢

مقدمة الأعداد المركبه

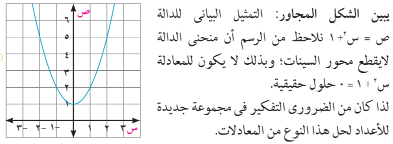
Complex Numbers

١ - ٢ مقدمة عن الأعداد المركبة

Complex Numbers



سبق أن درست نُظمًا مختلفة للأعداد، وهى نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "ن/" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ح" ورأينا أن أى نظام ينَشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة $س^{٢} = -١$ نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-١) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البيانى للدالة $ص = س^{٢} + ١$ نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لايقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$ حلول حقيقية.

لذا كان من الضرورى التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

تعلم العدد التخيلى Imaginary numbers

يعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى (-١)

أى أن: $ت^{٢} = -١$

وتسمى الأعداد التى على الصورة ٢ت، - ٥ت، $\sqrt{٣}$ ت **بالأعداد التخيلية**

بذلك نكتب $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣ت^{٢}} = \pm\sqrt{٣}$ ت

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥ت^{٢}} = \pm\sqrt{٥}$ ت وهكذا......

تفكير ناقد: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون $\sqrt{أ}\,\sqrt{ب} = \sqrt{أب}$؟ فسر ذلك بمثال عددى.

سوف تتعلم

- مفهوم العدد التخيلى.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- عدد تخيلى Imaginary Number
- عدد مركب Complex Number

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

خلفية

الأعداد المركبة نظام ينشأ لتوسيع نظام الأعداد الحقيقية، وذلك لحل معادلات جديدة لم تكن في النظام السابق، ويعطى هذا الدرس للطلاب بصورة مبسطة تتناول تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين، مفهوم الكميتين المترافقتين.

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف العدد التخيلي.
- يعبر عن القوى المختلفة الصحيحة للعدد ت.
- يعرف العدد المركب.
- يحدد شرط تساوى عددين مركبين.
- يجرى العمليات على الأعداد المركبة.
- يستخدم مفهوم العددين المترافقين لتبسيط الكسر الجبرى المركب.

مفردات أساسية

عدد تخيلى – عدد مركب – عددين مترافقين.

المواد التعليمية المستخدمة

آله حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

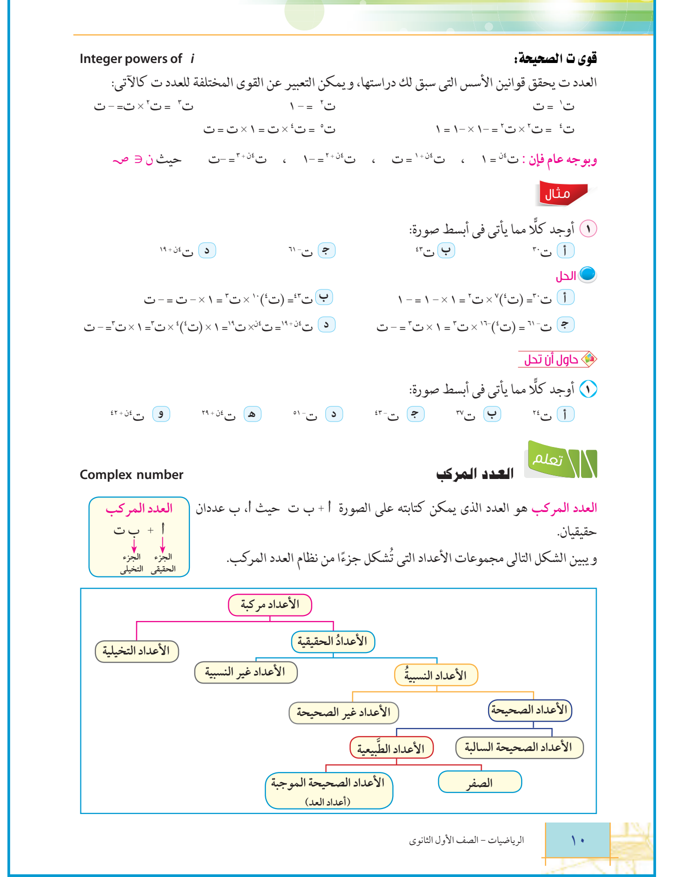
الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٩ إلى صفحة ١٤

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥ .

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).



قوى ت الصحيحة: Integer powers of i

العدد ت يحقق قوانين الأسس التى سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كالآتى:

$ت^{1} = ت$ ، $ت^{2} = -1$ ، $ت^{3} = ت^{2} \times ت = -ت$

$ت^{4} = ت^{2} \times ت^{2} = -1 \times -1 = 1$ ، $ت^{5} = ت^{4} \times ت = 1 \times ت = ت$

وبوجه عام فإن : $ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$ ، $ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$ حيث $ن \in ص$

مثال

١ أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ $ت^{30}$ ب $ت^{43}$ ج $ت^{-61}$ د $ت^{4ن+19}$

الحل

أ $ت^{30} = (ت^{4})^{7} \times ت^{2} = 1 \times -1 = -1$

ب $ت^{43} = (ت^{4})^{10} \times ت^{3} = 1 \times -ت = -ت$

ج $ت^{-61} = (ت^{4})^{-16} \times ت^{3} = 1 \times ت^{3} = -ت$

د $ت^{4ن+19} = ت^{4ن} \times ت^{19} = 1 \times (ت^{4})^{4} \times ت^{3} = 1 \times ت^{3} = -ت$

حاول أن تحل

١ أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ $ت^{24}$ ب $ت^{37}$ ج $ت^{-43}$ د $ت^{-51}$ هـ $ت^{4ن+29}$ و $ت^{4ن+42}$

تعلم

العدد المركب Complex number

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت حيث أ، ب عددان حقيقيان.

العدد المركب: أ + ب ت (أ: الجزء الحقيقى، ب ت: الجزء التخيلى)

ويبين الشكل التالى مجموعات الأعداد التى تُشكل جزءًا من نظام العدد المركب.

الرياضيات - الصف الأول الثانوى ١٠

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش:

- ذكر طلابك بمجموعة الأعداد التى سبق لهم دراستها، ثم إسألهم: لماذا يستحيل حل المعادلة $س^{2} + 1 = 0$ فى ح

عرض الدرس

تعلم: العدد التخيلى:

تجنب الخطأ:

- أشر إلى طلابك أنه عندما يكون $ت^{2} = -1$ فمن الخطأ أن تكون: $ت = \pm\sqrt{-1}$ ويكتفى عند الاشارة إلى العدد الأولى تكتب $ت^{2} = -4$

تفكير ناقد

تجنب الخطأ:

- أكد لطلابك أن:

$\sqrt{(-5)^{2}} \neq -5$ ولكن $\sqrt{(-5)^{2}} = \sqrt{25} = 5$

ويكون الناتج هو الجذر التربيعى الموجب فقط. بينما الجذران التربيعيان للعدد ٢٥ هما ± 5.

كذلك: $\sqrt{-3}\ \sqrt{-5} \neq \sqrt{15}$ ولكن

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-5}$

$= \sqrt{3ت^{2}} \times \sqrt{5ت^{2}} = \pm\sqrt{3}ت \times \pm\sqrt{5}ت$

$= \pm\sqrt{15}ت^{2} = \pm\sqrt{15}$

تعلم: الأعداد المركبة

- أكد لطلابك أن العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان، ت هو الجزء التخيلى، ثم استعرض معهم المخطط الذى يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد المختلفة الموضح صفحة (١٠) من كتاب الطالب.

إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث ع = أ + ب ت يسمى عددًا مركبًا، وتسمى أ بالجزء الحقيقي للعدد المركب ع، ب بالجزء التخيلي للعدد المركب ع.

وإذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = أ يكون حقيقيًّا، وإذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيليًّا.

مثال

② حل المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

الحل

المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

٩س^{٢} + ١٢٥ − ١٢٥ = ٦١ − ١٢٥   بإضافة (− ١٢٥) إلى طرفى المعادلة

٩س^{٢} = − ٦٤   بالتبسيط

س^{٢} = $-\frac{٦٤}{٩}$ بقسمة طرفى المعادلة على ٩

س^{٢} = $\frac{٦٤}{٩}$ ت^{٢} تعريف العدد المركب

س = ± $\frac{٨}{٣}$ ت   بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

حاول أن تحل

② حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠   ب) ٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠   جـ) ٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

تساوى عددين مركبين   Equality of two complex numbers

يتَساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأن الحقيقيان وتساوى الجزأن التخيليان.

إذا كان: أ + ب ت = جـ + ى ت   **فإن:** أ = جـ ، ب = ى   والعكس صحيح

مثال

③ أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان المعادلة: ٢س − ص + (س − ٢ص)ت = ٥ + ت حيث س، ص ∋ ع، ت^{٢} = −١

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

٢ س − ص = ٥ ، س − ٢ ص = ١

بحل المعادلتين ينتج أن   س = ٣ ، ص = ١

التقييم المستمر

تدريب إضافى

ضع علامة (✓) في الفراغ المناسب من الجدول التالى:

المجموع / العدد	عدد صحيح	عدد نسبى	عدد غير نسبى	عدد حقيقى	عدد تخيلى	عدد مركب
$\frac{١}{٢}$						
٤,٦						
٢ + ٥ت						
$\sqrt{-٥}$						
$\sqrt{٣}$						
٣̇						

- ناقش مع طلابك قوى ت الصحيحة، ويمكنك الاستعانة بالجدول التالى على أن تطلب من طلابك إكماله:

ت^{١} = ت	ت^{٢} = −١	ت^{٣} = −ت	ت^{٤} = ١
ت^{٥} = ...	ت^{٦} = ...	ت^{٧} = ...	ت^{٨} = ...
ت^{٩} = ت	ت^{١٠} = ...	ت^{١١} = ...	ت^{١٢} = ...

- وضح لطلابك أن قوى ت للأسس الصحيحة الموجبة تتكرر بصفة دورية، كلما زاد الأس بمقدار ٤ إلى القيم ت ، −١ ، −ت ، ١ ، وبوجه عام فإن:

ت$^{٤ن + ١}$	ت$^{٤ن + ٢}$	ت$^{٤ن + ٣}$	ت$^{٤ن + ٤}$
ت	−١	−ت	١

التقييم المستمر

تدريب إضافى:

ضع في أبسط صورة كل من:

ت^{٢١} ، ت^{٣٤} ، ت^{٤٣} ، ت^{٦١} ، $\frac{١}{ت^{٣٠}}$ ،

ت$^{٤ن + ١٧}$ ، ت$^{٤ن + ٣٣}$

إجابات حاول أن تحل

(١) أ ١ ب ت

جـ ت د ت

هـ ت و −١

(٢) أ ± ٣ت

ب ± ٧ت

جـ ± $\frac{٥}{٢}$ت

تعلم: تساوى عددين مركبين

للطلاب المتفوقين

يمكنك تقديم البرهان التالى:

إذا كان أ + ب ت = جـ + ى ت فإن:

(أ − جـ) = (ى − ب)ت وبتربيع الطرفين

(أ − جـ)^{٢} = −(ى − ب)^{٢} (حيث ت^{٢} = −١)

أى أن: (أ − جـ)^{٢} + (ى − ب)^{٢} = ٠

أى أن: أ = جـ ، ب = ى

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(٣) أ س = ٢ ، ص = −٣

ب س = ٥ ، ص = ٣

تعلم: العمليات على الأعداد المركبة.

ناقش مع طلابك الأمثلة الموضحة صفحة (١٢) من كتاب الطالب موضحًا أنه يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما أنه في التبسيط نجمع الأجزاء الحقيقية معًا والأجزاء التخيلية معًا.

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ ت

ب ٢س − ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

تعلم **العمليات على الأعداد المركبة** **Operations on complex numbers**

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (٧ − ٤ت) + (٢ + ت)

ب (٢ + ٣ت) (٣ − ٤ت)

الحل

أ المقدار = (٧ − ٤ت) + (٢ + ت)

= (٧ + ٢) + (−٤ + ١) ت باستخدام خاصيتى الإبدال والتجميع

= ٩ − ٣ ت بالتبسيط

ب المقدار = (٢ + ٣ت) (٣ − ٤ت)

= ٢ (٣ − ٤ت) + ٣ت (٣ − ٤ت) باستخدام خاصية التوزيع

= ٦ − ٨ت + ٩ ت − ١٢ ت^{٢} بفك الأقواس

= ٦ − ٨ت + ٩ت + ١٢ حيث ت^{٢} = − ١

= (٦ + ١٢) + (−٨ + ٩) ت = ١٨ + ت بالتبسيط

حاول أن تحل

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (١٢ − ٥ت) − (٧ − ٩ت)

ب (٤ − ٣ت)(٤ + ٣ت)

جـ (٥ − ٦ت)(٣ + ٢ت)


١٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

العددان المترافقان Conjugate Numbers

العددان أ + ب ت ، أ − ب ت يسميان بالعددين المترافقين فمثلًا ٤ − ٣ت ، ٤ + ٣ت عددان مترافقان، حيث:

(٤ − ٣ت)(٤ + ٣ت) = (٤)^{٢} − (٣ت)^{٢}

= ١٦ − ٩ت^{٢} = ١٦ − ٩(−١) = ٢٥   (الناتج عدد حقيقى)

تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

مثال

(٥) أوجد قيمتى س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$\frac{(٢ + ت)(٢ − ت)}{٣ + ٤ت}$ = س + ت ص

الحل

$\frac{٤ − ت^{٢}}{٣ + ٤ت}$ = س + ت ص   بفك الأقواس

$\frac{٤ + ١}{٣ + ٤ت} \times \frac{٣ − ٤ت}{٣ − ٤ت}$ = س + ت ص   بضرب البسط والمقام فى (٣ − ٤ت)

$\frac{٥(٣ − ٤ت)}{٢٥}$ = س + ت ص   بالتبسيط

$\frac{٣}{٥} − \frac{٤}{٥}$ت = س + ص ت   بتطبيق تساوى عددين مركبين

أى أن: س = $\frac{٣}{٥}$ ، ص = −$\frac{٤}{٥}$

حاول أن تحل

(٥) أوجد فى أبسط صورة قيمة كلٍّ مما يأتى:

أ) $\frac{٤ − ٦ت}{٢ت}$ ب) $\frac{٢٦}{٣ − ٢ت}$

ج) $\frac{٣ − ت}{٢ − ت}$ د) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ − ٢ت}$

التقييم المستمر

تدريبات إضافية

أوجد فى أبسط صورة ناتج كل مما يأتى:

أ) (٥ − ٤ت) − (٢ − ٣ت)

ب) (٦ + ٧ت) + (٣ − ٤ت)

ج) ٣ت (٣ + ٤ت)

د) (٤ − ٥ت)(٧ + ٣ت)

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٢)

(٤) أ) ٥ + ٤ت   ب) ٢٥   ج) ٢٧ − ٨ت

إجابة تفكير ناقد صفحة (١٣)

بفرض أن العددان: أ + ب ت ، أ − ب ت فإن :

مجموعهما = ٢أ ∈ ح، حاصل ضربهما أ^{٢} + ب^{٢} ∈ ح

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٣)

(٥) أ) −٣ − ٢ت

ب) ٦ + ٤ت

ج) $\frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}$ت

د) $\frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦}{٢٩}$ت

التدريب والتقييم

إجابات حاول أن تحل صـ١٤

(٦) شدة التيار الكلية =

شدة التيار في إحدى الدائرتين + شدة التيار في الدائرة الأخرى

٦ + ٤ت = $\frac{١٧}{٤ - ت} \times \frac{٤ + ت}{٤ + ت}$ + شدة التيار في الدائرة الأخرى

٦ + ٤ت = (٤ + ت) + شدة التيار في الدائرة الأخرى

شدة التيار في الدائرة الأخرى = ٢ + ٣ت

إجابات تحقق من فهمك

تفكير ناقد:

$(١ - ت)^{١٠} = [(١ - ت)^{٢}]^{٥} = (١ - ٢ت + ت^{٢})^{٥}$

$= (١ - ٢ت - ١)^{٥}$

$= (-٢ت)^{٥} = -٣٢ت^{٥} = -٣٢ت$

نشاط إثرائي للطلاب المتفوقين:

أوجد مجموعة حل المعادلة $س^{٣} + ٨ = ٠$ في مجموعة الأعداد المركبة.

تقييم أنشطة كتاب الأنشطة والتدريبات

نشاط صفحة (٦)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة ويحصل على نتائج دقيقة.
جيد جدًّا ٨ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة، ولكنه يحتاج لمساعدة طفيفة من المعلم للحصول على نتائج دقيقة.
جيد ٧ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط، ولكنه يحصل على بعض النتائج الخطأ.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب بمساعدة المعلم تنفيذ خطوات النشاط ويحصل على بعض النتائج ولكن بعضها خطأ.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب تنفيذ خطوات النشاط، ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

مثال

(٦) كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازي فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى ٥ − ٣ت أمبير وفى المقاومة الثانية ٢ + ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين).

الحل

∵ شدة التيار الكهربى الكلية = مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين.

∴ = (٥ − ٣ت) + (٢ + ت)

= (٥ + ٢) + (−٣ + ١) ت

= ٧ − ٢ت أمبير

حاول أن تحل

(٦) إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى ٦ + ٤ ت أمبير، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤ - ت}$، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى.

تحقق من فهمك

(١) تفكير ناقد: أوجد فى أبسط صورة $(١ - ت)^{١٠}$

١ - ٣

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining The Type of the Roots of a Quadratic Equation

خلفية

درس الطالب حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد، وتعرف مقدمة عن الأعداد المركبة، والآن سوف يحدد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها، وذلك باستخدام المميز (ب^٢ – ٤ أ جـ)

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها.

مفردات أساسية

جذر – مميز

المواد التعليمية المستخدمة

آله حاسبة علمية – برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٥ إلى صفحة ١٧

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٦ إلى صفحة ٧

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد:

فكر وناقش

ناقش باستخدام أمثلة من عندك أنواع الحلول التى يمكن الحصول عليها من حل المعادلة التربيعية ، ثم اطلب إلى طلابك إعطاء أمثلة أخرى لتأكيد ماورد فى البند.

---

١ - ٣ تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

فكر و ناقش

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلًّا وحيدًا مكررًا، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟

تعلم

المميز Discriminant

جذرا المعادلة التربيعية أس^٢ + ب س + جـ = ٠ حيث أ $\neq$ ٠، أ، ب، جـ $\in$ ع

هما: $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}$.

يسمى المقدار ب^٢ – ٤أجـ مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

مثال

(١) حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

أ) ٥س^٢ + س – ٧ = ٠ ب) س^٢ – ٢س + ١ = ٠

جـ) – س^٢ + ٥س – ٣٠ = ٠

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

أ) أ = ٥ ، ب = ١ ، جـ = –٧

المميز = ب^٢ – ٤أجـ

= ١ – ٤ × ٥ (–٧) = ١٤١

∵ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ب) أ = ١ ، ب = –٢ ، جـ = ١

المميز = ب^٢ – ٤أجـ

= ٤ – ٤ × ١ × ١ = ٠

∵ المميز يساوى صفرًا، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

سوف تتعلم

- كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذر Root
- مميز Discriminant

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

١٥ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

عرض الدرس

تعلم: المميز

يمكن استخدام قيمة المميز لتحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها، وذلك باستخدام معاملات المعادلة التربيعية، ويمكنك توسيع هذا المفهوم كالآتى:

- إذا كان المميز > ٠، كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.
- إذا كان المميز = ٠، كان للمعادلة جذران متساويان (جذر وحيد متكرر).
- إذا كان المميز < ٠ فلا توجد جذور حقيقية، ولكن يوجد جذران مركبان. لذلك يعتبر المميز بمثابة دليل لحل المعادلة التربيعية.

إرشادات

- ذكر طلابك أن حلول المعادلة تسمى جذور المعادلة، وهى قيم س التى يقطع عندها المنحنى البيانى للدالة التربيعية محور السينات في نقاط حقيقية.
- على الرغم من أن طريقة التحليل إلى عوامل قد تكون هى الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية إلا أن القانون العام يحل أى معادلة تربيعية.

تجنب الخطأ:

- إذا عوض بعض الطلاب عن القيم في القانون العام بشكل غير صحيح، وشجعه على كتابة القيم أ، ب، جـ على هامش الورقة؛ وذلك بعد كتابة المعادلة التربيعية فى الصورة القياسية قبل التعويض في القانون العام.
- ذكر طلابك بكتابة الجذرين المركبين على الصورة أ + ب ت حيث أ، ب أعداد حقيقية .

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٦)

أ جذران حقيقيان مختلفان (نسبيان)

ب جذران حقيقيان متساويان.

جـ جذران حقيقيان مختلفان (غير نسبيان)

د جذران مركبان

جـ أ = -١ ، ب = ٥ ، جـ = -٣٠ المميز = ب^2 - أجـ

= ٢٥ - ٤ × -١ × -٣٠ = -٩٥

∵ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان.

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطى للدالة المرتبطة بالمنحنى
(ب^2 - ٤أجـ) > ٠	جذران حقيقيان مختلفان	
ب^2 - ٤أجـ = ٠	جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان)	
ب^2 - ٤أجـ < ٠	جذران مركبان	

حاول أن تحل

١ عيِّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

أ ٦س^2 = ١٩ س - ١٥ ب ١٢س - ٤س^2 = ٩

جـ س (س - ٢) = ٥ د س(س + ٥) = ٢(س - ٧)

مثال

٢ أثبت أن جذرى المعادلة ٢س^2 - ٣ س + ٢ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

أ = ٢، ب = - ٣، جـ = ٢

∵ المميز = ب^2 - ٤أجـ ∴ المميز = (- ٣)^2 - ٤ × ٢ × ٢ = ٩ - ١٦ = - ٧

∵ المميز سالب ∴ يوجد جذران مركبان

القانون العام: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = $\frac{-(-٣) \pm \sqrt{٧ت^2}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,ت}{٤}$

جذرا المعادلة هما: $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت

أمثلة إضافية

أوجد المميز ثم حدد نوع الجذور لكل من المعادلات الآتية:

أ س^2 + ٤س + ٥ = ٠ ب س^2 - ٧س + ١٠ = ٠

جـ ٤س^2 - ١٢س + ٩ = ٠ د ٣س^2 - ٤س - ١٦ = ٠

الحل

أ أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٥

المميز (ب^2 - ٤ أ جـ) = ١٦ - ٤ × ١ × ٥ < ٠

يوجد جذران مركبان

ب أ = ١ ، ب = -٧، جـ = ١٠

المميز (ب^2 - ٤ أ جـ) = ٤٩ - ٤ × ١ × ١٠ > ٠

يوجد جذران حقيقيان. (لاحظ أن الجذرين نسبيان)

جـ أ = ٤ ، ب = -١٢ ، جـ = ٩

المميز (ب^2 - ٤ أ جـ) = ١٤٤ - ٤ × ٤ × ٩ = ٠

يوجد جذران حقيقيان متساويان

د أ = ٣ ، ب = -٤ ، جـ = -١٦

المميز (ب^2 - ٤ أ جـ) = ١٦ - ٤ × ٣ × -١٦ > ٠ يوجد جذران حقيقيان

تفكير ناقد: هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

حاول أن تحل

٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٧س^{٢} − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢(ك − ١) س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

٤(ك − ١)^{٢} − ٤ × ١ × ٩ = ٠

٤ك^{٢} − ٨ك − ٣٢ = ٠

ك^{٢} − ٢ك − ٨ = ٠

(ك − ٤)(ك + ٢) = ٠

ك = ٤ أو ك = −٢

التحقيق: عندما ك = ٤

تصبح المعادلة: س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: −٣، −٣

التحقيق: عندما ك = −٢

تصبح المعادلة: س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: ٣،٣

حاول أن تحل

٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٢ك س + ٧ك − ٦س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

تحقق من فهمك

١) **الربط بالصحة:** تقوم منظمة الصحة العالمية بجهود كبيرة للتوعية بأخطار أمراض الكبد الوبائي، وفي دراسة قامت بها فى أحد البلدان من بين ١٠٠٠٠ شخص فى أحد الأعوام كانت نتائجها كما هو مبين فى الجدول المقابل. وتمثل المعادلة: ص = −٢,٥ ن^{٢} − ٧,٥ ن + ٩٤٥ عدد المصابين، حيث ن تمثل عدد السنوات بعد عام ٢٠٠٥.

العام	عدد الإصابات لكل ١٠٠٠٠ شخص
٢٠٠٥	٩٤٥
٢٠٠٧	٩٢٠
٢٠١٠	٨٤٥
٢٠١٤	....
٢٠٢٠	....

أ) احسب عدد المصابين فى عامى ٢٠١٤، ٢٠٢٠

ب) أوجد باستخدام القانون العام قيمة ن عندما ص = ٤٩٥

جـ) متى يصبح عدد المصابين مساويًا صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسر إجابتك؟

د) ابحث باستخدام الشبكة الدولية (الأنترنت) أسباب هذا المرض وكيفية الوقاية منه وطرق علاجه.

توسيع

اطلب إلى الطلاب حل المعادلة س^{٣} − ٨ = ٠، ووضح لهم أن هذه معادلة تكعيبية، واطلب إليهم استخدام ما تعلموه في هذا الدرس لحل هذه المعادلة.

حل المعادلة هو ٢، −١ + $\sqrt{٣}$ ت، −١− $\sqrt{٣}$ ت، وذلك دون التعرض إلى رموز الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

فى بند تفكير ناقد صفحة ١٧:

ليس بالضرورة فمثلًا المعادلة:

س^{٢} − ٣ت س − ٢ = ٠ جذراها ت، ٢ت غير مترافقين.

(لاحظ أن معاملات معادلة الدرجة الثانية ليست جميعها أعدادًا حقيقية).

مثال إضافى (١):

أثبت أن جذرا المعادلة ٧س^{٢} − ١١س + ٥ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام؛ لإيجاد هذين الجذرين

الحل:

أ = ٧ ، ب = −١١ ، جـ = ٥

المميز (ب^{٢} − ٤ أ جـ) = ١٢١ − ٤ × ٧ × ٥ = ١٢١ − ١٤٠ < ٠

= −١٩ < ٠

يوجد جذران مركبان

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ = $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩}ت}{١٤}$

الجذران هما : $\frac{١١ + \sqrt{١٩}ت}{١٤}$ أو $\frac{١١ - \sqrt{١٩}ت}{١٤}$

مثال إضافى (٢) للطلاب الفائقين

إذا كان $\frac{٤ + ٧ت}{٢ + ت}$ هو أحد جذرى معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها أعداد حقيقية فأوجد هذه المعادلة .

الحل

بتبسيط الجذر يصبح ٣ + ٢ ت باستخدام المرافق طالما أن معاملات المعادلة أعداد حقيقية فإن الجذر الآخر يكون مرافق الجذر الأول حتى يكون مجموع الجذرين، حاصل ضربهما أعداد حقيقية .

مجموع الجذرين = (٣ + ٢ ت) + (٣ − ٢ ت) = ٦

حاصل ضربهما = (٣ + ٢ ت) (٣ − ٢ ت) = ١٣

المعادلة هى : س^{٢} − ٦س + ١٣ = ٠

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٧)

٢) ك = ١ ، ك = −٧

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ) ٦٧٥ ، ٢٧٠

ب) ن = ١٢

جـ) بوضع ص = ٠ تكون ن = ١٨ ، ن = −٢١ مرفوض؛ أى في عام ٢٠٢٣ الإجابة معقولة؛ لأن التقدم الطبى مستمر حتى يتم القضاء على هذا المرض.

أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين

١) اثبت إذا كانت أ عدد نسبى فإن جذرى المعادلة: ١٥ س^{٢} − (١٠ + ٣أ)س + ٢أ = ٠ يكونا نسبيين.

٢) اثبت أنه لجميع قيم ب، جـ الحقيقة يكون جذرا المعادلة ٢س^{٢} − ب س + جـ س − ٢ = ٠ حقيقيين.

التقييم

١) أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة ٣س^{٢} − ٦س + ك = ٠ متساويين.

٢) أوجد مجموعة الحل في ح للمعادلة:
٦س^{٢} − ٥س − ٢ = ٠

١ - ٤

العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

خلفية

سبق للطالب أن تعلم كيفية إيجاد جذرى المعادلة التربيعية، وفى هذا الدرس سوف يتعلم كيفية إيجاد مجموع جذرى المعادلة التربيعية وحاصل ضربهما دون حل المعادلة، وكذلك كيفية تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة التربيعية دون حلها.

يوجد المعادلة التربيعية متى علم جذراها.

يوجد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.

مفردات أساسية

جذر – مميز – مجموع جذرين – حاصل ضرب جذرين

المواد التعليمية المستخدمة

آله حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٨ إلى صفحة ٢١ (كتاب الأنشطة) والتدريبات من صفحة ٨ إلى صفحة ١٠ الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

ناقش طلابك فى الإجابة عن السؤالين المطروحين فى بند "فكر وناقش" مع مساعدتهم على التوصل إلى العلاقات الصحيحة.

---

١ - ٤

العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مجموع جذرين Sum of Two Roots
- حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

نعلم أن جذرى المعادلة ٤س^٢ – ٨س + ٣ = ٠ هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$

مجموع الجذرين $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = \frac{١+٣}{٢} = ٢$

حاصل ضرب الجذرين $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٤}$

هل توجد علاقة بين مجموع جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

تعلم

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sum and product of two roots

جذرا المعادلة التربيعية أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ هما:

$\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثانى = م فإن:

ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ (أثبت ذلك) ل م = $\frac{جـ}{أ}$ (أثبت ذلك)

تعبير شفهى فى المعادلة التربيعية أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

أوجد ل + م ، ل م فى الحالات الآتية:

أ إذا كان أ = ١ ب إذا كانت ب = أ جـ إذا كان أ = جـ

مثال

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة:

٢س^٢ + ٥ س – ١٢ = ٠

الحل

أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = –١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٥}{٢}$ = $-\frac{٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{-١٢}{٢}$ = –٦

١٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

عرض الدرس

تعلم: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

إسأل:

- إذا علمت مجموع جذرى المعادلة التربيعية – فماذا يعنى ذلك؟ القيمة $\frac{-ب}{أ}$ ، والتى تمثل سالب ناتج قسمة معامل س على معامل س^٢ فى المعادلة التربيعية.
- إذا علمت حاصل ضرب الجذرين فماذا يعنى ذلك؟ القيمة $\frac{جـ}{أ}$ ، والتى تمثل قسمة الحد المطلق على معامل س^٢ فى المعادلة التربيعية.

التقييم المستمر

إجابات تعبير شفهى

أ إذا كان أ = ١ ، فإن ل + م = –ب ، ل م = جـ

ب إذا كان ب = أ ، فإن ل + م = –١

جـ إذا كان أ = جـ ، فإن ل م = ١

إجابات حاول أن تحل ص ١٩

١ أ ل + م = $-\frac{١}{٢}$ ، ل م = –٣

ب ل + م = $\frac{٢٣}{٣}$ ، ل م = ٣

جـ المعادلة هى: ٢س^٢ + س – ٦ = ٠

ل + م = $-\frac{١}{٢}$ ، ل م = –٣

تدريبات إضافية

أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات التربيعية الآتية:

١ (٣س + ١)(س + ٤) = (س − ١)(٢س − ٣)

٢ $\frac{١}{س − ١} + \frac{١}{س + ١} = ٢$ حيث س ∌ {−١، ١}

٣ $\frac{٤س + ١}{س − ١} = \frac{٣س − ٤}{س + ٦}$ ، س ∌ {٢، −٦}

استعرض مع طلابك الأمثلة الواردة فى صفحة (١٩) من كتاب الطالب، واطلب إليهم حل ما ورد في بند «حاول أن تحل» مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٩)

٢ $\frac{−٨}{٣} = \frac{−جـ}{٣}$ أى أن جـ = ٨

المعادلة هى: ٣س^٢ + ١٠س + ٨ = ٠

وحل المعادلة هو $\{\frac{−٤}{٣}، −٢\}$

٣ $\frac{−ب}{٢} = −\frac{٣}{٢}$ أى أن ب = ٣

المعادلة هى ٢س^٢ + ٣س − ٥ = ٠

وحل المعادلة هو $\{\frac{−٥}{٢}، ١\}$.

٤ ∵ ل = (٢ + ت) هى أحد جذور المعادلة

س^٢ − ٤س + ب = ٠ فيكون جذرها الآخر

م = ١ + ت ∵ ل × م = ب

∴ ب = (٢ + ت) (٢ − ت) = ٤ − ت^٢ = ٥

تدريبات إضافية

١ إذا كان ١ + $\sqrt{٢}$ ت هو أحد جذور المعادلة

س^٢ − ٢س + جـ = ٠ فأوجد.

أ قيمة الجذر الآخر ب قيمة جـ

٢ أوجد المعادلة التربيعية بمعلومية جذراها في كل مما يأتى:

أ ٣، −٥ ب −٤، ٧

جـ −٢، −٦ د $\sqrt{٢}$ +١، $\sqrt{٢}$ −١

هـ ت، $\frac{١}{ت}$ و $\frac{−١ + ت}{ت}$، $\frac{٢}{ت + ١}$

٣ إذا كانت $\frac{٩+٧ت}{٥+ت}$ هو أحد جذرى معادلة تربيعية معاملاتها أعداد حقيقية، فأوجد هذه المعادلة

[الإجابة: س^٢−٤س+٥=٠]

حاول أن تحل

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية:

أ ٢ س^٢ + س − ٦ = ٠ ب ٣ س^٢ = ٢٣ س − ٣٠ جـ (٢س − ٣) (س + ٢) = ٠

مثال

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢ س^٢ − ٣ س + ك = ٠ يساوى ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

الحل

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ $\frac{ك}{٢}$ = ١ ∴ ك = ٢

أ = ٢، ب = −٣، جـ = ٢

القانون العام: س = $\frac{−ب ± \sqrt{ب^٢ − ٤أجـ}}{٢أ}$

= $\frac{٣ ± \sqrt{٩ − ١٦}}{٤}$ = $\frac{٣ ± \sqrt{٧ت^٢}}{٤}$ = $\frac{٣ ± \sqrt{٧}ت}{٤}$

مجموعة حل المعادلة هى {$\frac{٣}{٤}$ + $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت ، $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت}

حاول أن تحل

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٣س^٢ + ١٠س − جـ = ٠ هو $\frac{−٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ، ثم حل المعادلة.

٣ إذا كان مجموع جذرى المعادلة ٢ س^٢ + ب س − ٥ = ٠ هو −$\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

مثال

٣ إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^٢ − ٢ س + أ = حيث أ ∈ ع * فأوجد:

أ الجذر الآخر ب قيمة أ

الحل

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = أ

أ ∵ ١ + ت هو أحد جذرى المعادلة

∴ الجذر الآخر = ١ − ت لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما = ٢

ب ∵ حاصل ضرب الجذرين = أ

∴ (١ + ت) (١ − ت) = أ

∴ ١ + ١ = أ ∴ أ = ٢

حاول أن تحل

٤ إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^٢ −٤ س + ب = ٠ فأوجد

أ الجذر الآخر. ب قيمة ب

تعلم

تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية: أس^٢ + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠

بقسمة طرفى المعادلة على أ: ∴ س^٢ + $\frac{ب}{أ}$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

أى س^٢ − ($\frac{−ب}{أ}$) س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

∵ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ، ل + م = −$\frac{ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$

∴ المعادلة التربيعية التى جذراها ل،م هى: س^٢ − (ل + م) س + ل م = ٠

مثال

٤ كون المعادلة التربيعية التى جذراها ٤، −٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

∵ ل + م = ٤ + (−٣) = ١، ل م = ٤ (−٣) = −١٢، ∵ صيغة المعادلة التربيعية هى: س^٢ − (ل + م) س + ل م = ٠

∴ المعادلة هى: س^٢ − س − ١٢ = ٠

مثال

٥ كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها: $\frac{−٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{−٢−٤ت}{٢−ت}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

ل = $\frac{−٢+٢ت}{١+ت}$ × $\frac{١ − ت}{١ − ت}$ = $\frac{٤ ت}{٢}$ = ٢ت

م = $\frac{−٢−٤ت}{٢−ت}$ × $\frac{٢ + ت}{٢ + ت}$ = $\frac{− ١٠ت}{٥}$ = − ٢ ت

ل + م = ٢ ت − ٢ ت = ٠

، ل م = ٢ ت × − ٢ ت = − ٤ت^٢ = ٤

∵ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م : س^٢ + (ل + م) س + ل م = ٠

∴ س^٢ + ٤ = ٠

حاول أن تحل

٥ كوِّن المعادلة التربيعية فى كل مما يأتى بمعلومية جذريها:

أ ٣ ، −٥ ب −٩ ت ، ٩ ت جـ $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ − ت}$





تعلم: تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذرها

يمكن تكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ل، م كالآتى: (س – ل)(س – م) = ٠

وبفك الأقواس: $س^{٢}$ – (ل + م) س + ل م = ٠

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٠)

٥ أ $س^{٢} + ٢س - ١٥ = ٠$

ب المعادلة هى: $س^{٢} + ٢٥ = ٠$

جـ المعادلة هى: $س^{٢} + ٩ = ٠$

تدريبات إضافية

أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها:

أ –ت، ت [الإجابة: $س^{٢} + ١ = ٠$]

ب ١ + ت، ١ – ت [الإجابة: $س^{٢} - ٢س + ٢ = ٠$]

جـ $\sqrt{٢}$ + ت ، $\sqrt{٢}$ – ت

[الإجابة: $س^{٢} - ٢\sqrt{٢}\, س + ٣ = ٠$]

د ٢ت ، –٣ت [الإجابة: $س^{٢} + ت\, س + ٦ = ٠$]

إجابة تفكير ناقد صفحة (٢١)

نفرض أن معادلة منحنى الدالة التربيعية تعطى بالعلاقة: ص = أ$س^{٢}$ + ب س + جـ وبالتعويض عن نقاط تقاطع كل منحنى بمحاور الإحداثيات نحصل على قيم أ، ب، جـ وبذلك نحصل على معادلة كل منحنى وهى:

الأحمر: د(س) = $س^{٢}$ – ٤

الأزرق: د(س) = $\frac{٣}{٢}$ ($س^{٢}$ – ٤)

الأسود: د(س) = ٢($س^{٢}$ – ٤)

علمًا بأن جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطتين (–٢، ٠)، (٢، ٠)

❑ يمكنك عرض بعض المتطابقات الآتية على طلابك، ثم اطلب إليهم إثبات صحتها:

$ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢\, ل\, م$

$(ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤\, ل\, م$

$\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل\, م}$

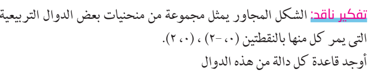
$\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل\, م} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل\, م}$

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢١)

٦ أ $س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$ ب $٢س^{٢} + ١٣س + ٢ = ٠$

جـ $٤س^{٢} - ٤س - ٣ = ٠$



العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

تفكير ناقد: الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التى يمر كل منها بالنقطتين (٠، –٢) ، (٠، ٢).
أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

مثال

٦ إذا كان ل، م جذرى المعادلة ٢ $س^{٢}$ – ٣ س – ١ = ٠ فكون المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^{٢}$، $م^{٢}$.

الحل

المعادلة المعلومة بالتعويض عن أ = ٢، ب = –٣، جـ = –١: ل + م = $-\frac{-٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$، ل م = $-\frac{١}{٢}$

المعادلة المطلوبة بالتعويض عن ل + م = $\frac{٣}{٢}$، ل م = $-\frac{١}{٢}$ فى الصيغة $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$\therefore ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م = (\frac{٣}{٢})^{٢} - ٢ \times (-\frac{١}{٢})$

$= \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{٩}{٤} + \frac{٤}{٤} = \frac{١٣}{٤}$

$\therefore ل^{٢}م^{٢} = (ل م)^{٢}$

$\therefore ل^{٢}م^{٢} = (-\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$

لاحظ أن: $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

بالتعويض فى صيغة المعادلة التربيعية: $س^{٢}$ – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

$س^{٢} - \frac{١٣}{٤} س + \frac{١}{٤} = ٠$ بضرب طرفى المعادلة فى ٤

∴ المعادلة التربيعية المطلوبة هى: $٤ س^{٢} - ١٣ س + ٤ = ٠$

حاول أن تحل

٦ فى المعادلة السابقة ٢ $س^{٢}$ – ٣ س – ١ = ٠ كوِّن المعادلات التربيعية التى جذرا كل منها كالآتى:

أ $\frac{١}{ل}$، $\frac{١}{م}$ ب $\frac{ل}{م}$، $\frac{م}{ل}$ جـ ل + م ، ل م

تحقق من فهمك

١ فى كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التى جذراها:

أ $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٤}{٣}$ ب ٥ $\sqrt{٣}$ ، –٢ $\sqrt{٣}$ جـ ٣ + $\sqrt{٢}$ ت ، ٣ – $\sqrt{٢}$ ت

٢ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ + ٣س –٥ = ٠ فكوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^{٢}$، $م^{٢}$.

كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول ٢١

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

١ أ $١٢س^{٢} - ٢٥س + ١٢ = ٠$

ب $س^{٢} - ٣\sqrt{٣}\, س - ٣٠ = ٠$

جـ ل + م = –٣ ، ل م = ٥ ، $س^{٢} + ٣س + ٥ = ٠$

٢ المعادلة هى: $س^{٢} - ١٩س + ٢٥ = ٠$

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين:

إذا كان ل، م جذرين غير معلومين للمعادلة $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$ فأوجد القيم العددية للمقدار $٣ل^{٢}م^{٣} + ٣ل^{٣}م^{٢}$

التقييم

١ أوجد الشرط اللازم ليكون احد جذرى المعادلة: أ $س^{٢}$ + ب س + جـ أربعة أمثال الجذر الآخر.

٢ إذا كان ل م جذرين غير معلومين للمعادلة $٣س^{٢} - ٦س - ٢ = ٠$ فأوجد المعادلة التربيعية التى جذرها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

١ - ٥

إشارة الدالة

Sign of a Function



١ - ٥

إشارة الدالة

Sign of a Function

سوف تتعلم

- بحث إشارة كل من: الدالة الثابتة – دالة الدرجة الأولى – دالة الدرجة الثانية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست التمثيل البيانى لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟
المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير س (مجال س) التى تكون عندها قيم الدالة د على النحو الآتى:

موجبة، أى د(س) > ٠
سالبة، أى د(س) < ٠
مساوية للصفر د(س) = ٠

تعلم

أولا: إشارة الدالة الثابتة First: The sign of the Constant Function

إشارة الدالة الثابتة د حيث د(س) = جـ (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.
والشكل التالى يوضح إشارة الدالة د.

مثال

١ عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٥ ب د(س) = −٧

الحل

أ ∵ د(س) > ٠ ∴ إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع
ب ∵ د(س) < ٠ ∴ إشارة الدالة سالبة لكل س ∈ ع

خلفية

بحث إشارة الدالة تعنى تحديد فترات المتغير س التى تكون عندها الدالة موجبة والفترات التى تكون عندها الدالة سالبة، والفترات التى تكون فيها الدالة مساوية للصفر.

وتفيد تحديد هذه الفترات عند حل مسائل متباينات الدرجة الأولى في متغير، وفى متغيرين (مسائل البرمجة الخطية)، وكذلك عند دراسة متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد (الدرس اللاحق).

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد إشارة الدالة الثابتة.
- يحدد إشارة دالة الدرجة الأولى.
- يحدد إشارة الدالة التربيعية.

مفردات أساسية

إشارة دالة – دالة موجبة – دالة سالبة

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٢٢ إلى صفحة ٢٤
كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ١١ إلى صفحة ١٢
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- ناقش مع طلابك ما ورد في بند "فكر وناقش" مؤكدًا على ما هو المقصود بإشارة الدالة.

عرض الدرس

إرشادات :

قبل البدء فى هذا الدرس يجب مراعاة مايلى:

١) يجب أن يتقن الطلاب تحليل المقدار الثلاثي البسيط والمركب، وحل معادلات الدرجة الأولى والثانية في مجهول واحد.

٢) يجب أن يتقن الطلاب مفهوم الفترات المغلقة والمفتوحة وعمليات التقاطع والاتحاد والفرق والإكمال للمجموعات.

٣) أن يكون لدى الطالب المهارة في استخدام برامج الحاسوب في رسم دوال الدرجة الأولى والدرجة الثانية.

تعلم: إشارة الدالة الثابتة

ناقش مع طلابك كيفية تحديد إشارة الدالة الثابته مستعينًا بما ورد في صفحة (٢٢) من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٣)

١) أ) سالبة لكل س ∋ ح

ب) موجبة لكل س ∋ ح

تعلم: إشارة دالة الدرجة الأولى:

توسيع:

وضح لطلابك أنه عند تعيين إشارة الدالة، يمكن اتباع الخطوات الآتية:

١) نحل المعادلة الممثلة للدالة، ونقسم خط الأعداد إلى فترات حسب جذور المعادلة.

٢) نختار قيم حقيقية من كل فترة، ونعوض بها في الدالة، وبالتالى يمكن تحديد إشارتها.

أمثلة إضافية:

ابحث إشارة كل من الدالتين:

أ) د(س) = ٢س − ٣ ب) د(س) = ٦ − ٣س

الحل

أ) س = $\frac{٣}{٢}$ تجعل د(س) = ٠

د(س): − − − − − − − − − | + + + + + +

س: −∞ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ∞

حاول أن تحل

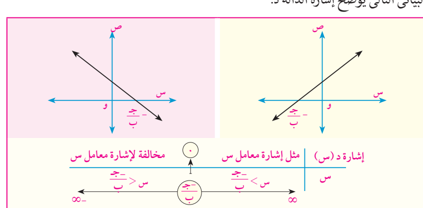
١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = − $\frac{٢}{٣}$ ب) د(س) = $\frac{٥}{٢}$

ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية) **Second: Sign of the Linear Function**

قاعدة الدالة د هى د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠ ، س = − $\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠

والشكل البيانى التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

٢) عين إشارة الدالة د حيث د(س) = س − ٢ مع توضيح ذلك بيانيًا:

الحل

قاعدة الدالة: د(س) = س − ٢

رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د(س) = −٢

من الرسم نجد أن:

- الدالة موجبة عندما س > ٢
- الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢
- الدالة سالبة عندما س < ٢

حاول أن تحل

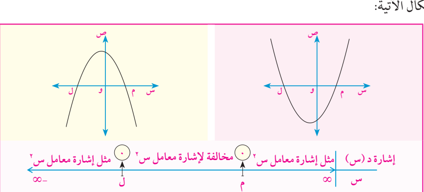
٢) عين إشارة الدالة د(س) = −٢س − ٤ مع توضيح ذلك بيانيًا.

ثالثا: إشارة الدالة التربيعية **Third: Sign of the Quadratic Function.**

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

نوجد مميز المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإذا كان:

أولًا: ب^{٢} − ٤أ جـ > ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن ل < م تكون إشارة الدالة كما فى الأشكال الآتية:



مثال

٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة: س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

(س − ٣) (س + ١) = ٠

فيكون جذرا المعادلة: −١، ٣

من الرسم نجد أن:

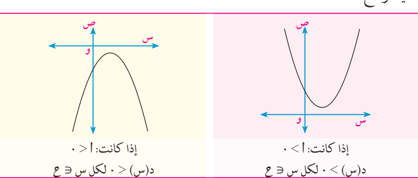
- د(س) > ٠ عندما س ∋ ح − [−١، ٣]
- د(س) < ٠ عندما س ∋]−١، ٣[
- د(س) = ٠ عندما س ∋ {−١، ٣}

حاول أن تحل

٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} − س + ٦ ثم عين إشارة الدالة د.



ثانيًا: إذا كان: ب² − ٤أ جـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س²، والأشكال التالية توضح ذلك.



مثال

٤ مثل بيانيًّا د حيث د(س) = س² − ٤س + ٥ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب² − ٤ أ جـ) = (−٤)² − ٤ × ١ × ٥

= ١٦ − ٢٠ = −٤ < ٠

لذلك فإن المعادلة س² − ٤س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع (لأن معامل س² > ٠)

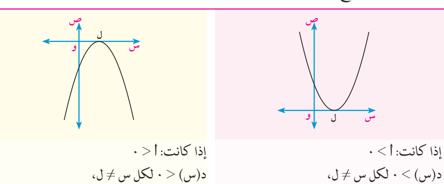
حاول أن تحل

٤ مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = − س² − ٢س − ٤ ثم عين إشارة الدالة د.

ثالثًا: إذا كان: ب² − ٤أ جـ = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى:

➢ مثل إشارة أ عندما س ≠ ل ➢ د(س) = ٠ عندما س = ل

والأشكال الآتية توضح ذلك.



اختر قيمة لكل فترة وابحث إشارة الدالة:

- عندما س = ٠ د(س) = ٢ × ٠ − ٣ < ٠

الدالة سالبة في عندما س < $\frac{٣}{٢}$

- عندما س = ٢ د(س) = ٢ × ٢ − ٣ > ٠

الدالة موجبة عندما س > $\frac{٣}{٢}$

ب س = ٢ تجعل د(س) = ٠

- عندما س = ٠ د(س) = ٦ − ٠ > ٠

الدالة موجبة عندما س < ٢

- عندما س = ٣ د٢(س) = ٦ − ٩ < ٠

الدالة سالبة عندما س > ٢

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة ٢٣

٢ د(س) = ٠ عندما س = −٢

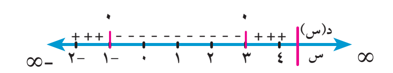
د(س) < ٠ عندما س > −٢

د(س) > ٠ عندما س < −٢

تعلم: إشارة دالة الدرجة التربيعية:

في مثال (٢)

يمكن أن يحل هذا المثال بالتمثيل على خط الأعداد كالآتى:



جذرا المعادلة هما: −١، ٣

د(س) = ٠ عندما س = −١، ٣

عندما س = −٢ : د(س) = (−٢ − ٣)(−٢ + ١) > ٠

فتكون الدالة موجبة

عندما س = ٠ : د(س) = (٠ − ٣)(٠ + ١) < ٠

فتكون الدالة سالبة

عندما س = ٤ : د(س) = (٤ − ٣)(٤ + ١) > ٠

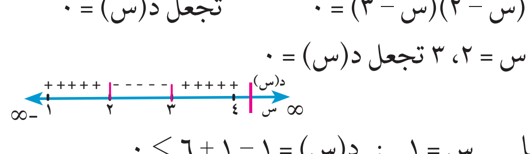
فتكون الدالة موجبة

إجابات حاول أن تحل ص ٢٤

٣ س² − س + ٦ = ٠ ∴ تجعل د(س) = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠ تجعل د(س) = ٠

س = ٢، ٣ تجعل د(س) = ٠



عندما س = ١ : د(س) = ١ − ١ + ٦ > ٠

عندما س = ٢$\frac{١}{٢}$: د(س) = (٢$\frac{١}{٢}$ − ٢)(٢$\frac{١}{٢}$ − ٣) < ٠

عندما س = ٤ : د(س) = (٤ − ٢)(٤ − ٣) > ٠

الدالة موجبة في ح − [٢، ٣]، الدالة سالبة في]٢، ٣[

إجابات حاول أن تحل ص ٢٤

٤ المميز = ٤ − ٤ × −١ × −٤ = ٤ − ١٦ < ٠

معامل س² = ٠ فتكون د(س) < ٠

لجميع قيم س الحقيقية

إجابات حاول أن تحل

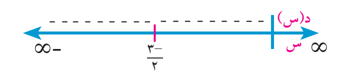
٥ ∵ −٤س² − ١٢س − ٩ = ٠

∴ ٤س² + ١٢س + ٩ = ٠

أي (٢س + ٣)² = ٠

س = $\frac{-٣}{٢}$ تجعل د(س) = ٠

س = ح − {$\frac{-٣}{٢}$} إشارة د(س) < ٠



التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

(١) أ د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

د(س) < ٠ عندما س < $\frac{٣}{٢}$

د(س) > ٠ عندما س > $\frac{٣}{٢}$

ب د(س) = ٠ عندما س = ٤

د(س) < ٠ عندما س < ٤

د(س) > ٠ عندما س > ٤

جـ د(س) = ٠ عندما س = {−٢، ٢}

د(س) < ٠ عندما س ∈]−٢، ٢[

د(س) > ٠ عندما س ∈ ح − [−٢، ٢]

د د(س) = ٠ عندما س = {−١، ١}

د(س) < ٠ عندما س ∈]−١، ١[

د(س) > ٠ عندما س ∈ ح − [−١، ١]

هـ المميز = ١٦ − ٤ × ١ × ٤ = ٠

د(س) = ٠ عندما س = −٢

د(س) < ٠ عندما س ∈ ح − {−٢}

و المميز = ٤ − ٤ × ٣ × ٤ > ٠

د(س) = ٠ لكل س ∈ ح

أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين

(١) اكتب ملخصًا من عندك لكيفية تحديد إشارة الدالة في كل حالة من الحالات الآتية:

أ الدالة الثابتة.

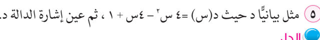
ب دالة الدرجة الأولى في متغير واحد.

جـ دالة الدرجة الثانية في متغير واحد.

(٢) عند بحث إشارة دوال أعلى من الدرجة الثانية كما في الدالة الآتية: د(س) = س (س − ٢)(س + ٣) تمثل حل المعادلة د(س) = ٠ على خط الأعداد ونبحث الدالة على أربع فترات على خط الأعداد كالآتي:

د(س) + + + | − − − − − − | + + + + + | − − −

س ∞ ٢ ٠ −٣ −∞



مثال

(٥) مثل بيانيًّا د حيث د(س) = ٤ س^{٢} − ٤س + ١ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب^{٢} − ٤أ جـ) = (−٤)^{٢} − ٤ × ٤ × ١

= ١٦ − ١٦ = ٠

لذلك فإن المعادلة ٤ س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ لها جذران متساويان.

بالتحليل: (٢س − ١)^{٢} = ٠

بوضع: ٢س − ١ = ٠ تكون س = $\frac{١}{٢}$

د(س) > ٠ عندما س ≠ $\frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

(٥) مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = − ٤ س^{٢} − ١٢س − ٩ ثم عين إشارة الدالة د.

مثال

(٦) اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ع يكون جذرا المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك −٣ = صفر حقيقيين مختلفين

الحل

المميز (ب^{٢} − ٤أجـ) = (−ك)^{٢} − ٤ × ٢ × (ك − ٣) = ك^{٢} − ٨ك +٢٤

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

نبحث إشارة الدالة ص = ك^{٢} − ٨ك +٢٤

فيكون مميز المعادلة ك^{٢} − ٨ك + ٢٤ = ٠ هو:

(−٨)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٤ = ٦٤ − ٩٦ = −٣٢ < ٠

لذلك فإن المعادلة ك^{٢} − ٨ك +٢٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة الدالة ص = ك^{٢} − ٨ك +٢٤ موجبة لكل س ∈ ع (لماذا)؟

فيكون مميز المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك −٣ = صفر موجب لكل س ∈ ع

∴ جذرا المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ع

تحقق من فهمك

(١) عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٢س − ٣ ب د(س) = ٤ − س جـ د(س) = س^{٢} − ٤

د د(س) = ١ − س^{٢} هـ د(س) = ٤ + ٤س + س^{٢} و د(س) = ٣س − ٢س^{٢} + ٤

٢٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

- بوضع س = −٤ تكون د(س) = −٤ × −٦ × −١ < ٠

∴ د(س) < ٠ في]−∞، −٣[

- بوضع س = −٤ تكون د(س) = −١ × −٣ × ٢ > ٠

∴ د(س) > ٠ في]−٣، ٠[

- بوضع س = ١ تكون د(س) = ١ × −١ × ٤ < ٠

∴ د(س) < ٠ في]٠، ٢[

- بوضع س = ٢ تكون د(س) = ٣ × ١ × ٦ > ٠

∴ د(س) > ٠ في]٢، ∞[

والآن: ابحث إشارة الدالة د(س) = (س−١)(س−٢)(س+٣)

التقييم

ابحث إشارة كل من الدوال التالية:

أ د(س) = ٤

ب د(س) = ٣س − ٢

جـ د(س) = س^{٢} + ٢س − ٣

د د(س) = س^{٢} − ٢س + ٣

هـ د(س) = ٤ س^{٢} − ١٢س +٩

١ - ٦

متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

Quadratic Inequalities

> ### متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد
> Quadratic Inequalities
>
> ١ - ٦
>
> **المتباينات التربيعية:** Quadratic Inequalities
>
> **سوف تتعلم**
> - حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد.
>
> فكر و ناقش
>
> سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد؟
>
> **لاحظ أن:**
>
> س^2 – س – ٢ > ٠ هى متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالى
>
> بينما د(س) = س^2 – س – ٢ هى الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.
>
> **من الشكل المقابل نجد أن:**
> - مجموعة حل المتباينة س^2 – س – ٢ > ٠ فى ع هى]–∞ ، –١[∪]٢ ، ∞[
> - مجموعة حل المتباينة س٢ – س – ٢ < ٠ فى ع هما]–١، ٢[
>
> ص ، س ، س/ ، ص/ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، –١ ، –٢ ، –٣ ، –٤ ، –٥ ، –٦
>
> **المصطلحاتُ الأساسيّةُ**
> - متباينة Inequality
>
> ### تعلم حل المتباينة التربيعية
>
> **الأدوات والوسائل**
> - آلة حاسبة علمية
>
> **مثال**
>
> ① حل المتباينة: س^2 – ٥س – ٦ > ٠
>
> **الحل**
>
> لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:
>
> **خطوة (١):** نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:
>
> د(س) = س^2 – ٥س – ٦
>
> ٢٧ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

خلفية

سبق ان درس الطالب متباينات الدرجة الأولى في متغير واحد، والآن سوف يدرس متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد بعد دراسة معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد.

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

مفردات أساسية

متباينة من الدرجة الثانية

المواد التعليمية المستخدمة

آله حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٢٧ إلى صفحة ٢٩

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ١٣

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

استعرض مع طلابك ما ورد في بند "فكر وناقش" صفحة (٢٧) من كتاب الطالب، مؤكدًا متى يكون المنحنى الممثل للمعادلة التربيعية المرتبطة بالمتباينة التربيعية المراد تمثيلها بيانيًّا، متصلًا ومتى يمكون متقطعًا.

إرشادات

قبل البدء فى هذا الدرس يجب مراعاة ما يلى:

- يجب أن يتقن الطالب حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد و إيجاد مجموعة الحل.
- يجب أن يتقن الطالب تمثيل جذور المعادلة التربيعية على خط الأعداد وتقسيمها إلى فترات.
- يجب أن يتدرب الطالب على تحديد الفترات التي تحقق المتباينة.
- يجب أن يستوعب الطالب مفاهيم التقاطع والاتحاد والفرق، وذلك لاستخدامها فى تحديد الفترات التى تحقق المتباينة.
- أن يكون لدى الطالب مهارة استخدام برامج الحاسوب في رسم متباينات الدرجة الثانية وتحديد منطقة الحل لها.

تعلم: حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد

أمثلة إضافية

حل المتباينة ١ − س^{٢} > ٠

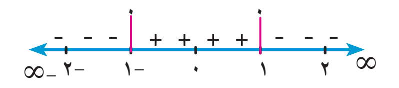
الحل

المعادلة المرتبطة بالمتباينة: ١ − س^{٢} = ٠

بالتحليل إلى العوامل الأولية: (١ − س)(١ + س) = ٠

مجموعة حل المعادلة: س = {−١، ١}

نقسم خط الأعداد إلى فترات



عندما س = −٢: ١ − ٤ > ٠ لا تحقق المتباينة

عندما س = ٠: ١ − ٠ > ٠ تحقق المتباينة

عندما س = ٢: ١ − ٤ > ٠ لا تحقق المتباينة

مجموعة الحل هى]−١، ١[

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٨)

(١) أ حل المتباينة هو ح − [−٤، ٢]

ب حل المتباينة هو]−٣، ٤[

خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦ ،
ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

س = ٦ أ، س = −١

موجب ⊙ سالب ⊙ موجب د(س)
+ + + + + | − − − − − − | + + + + +
∞− ١− ٦ س ∞

خطوة (٣): تحدد الفترات التى تحقق المتباينة س^{٢} − ٥س − ٦ > ٠

∞− ١− ٦ ∞

فيكون مجموعة حل المتباينة هى:]−∞، −١[∪]٦، ∞[

حاول أن تحل

(١) حل كلًا من المتباينات الآتية:

أ س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠ ب س^{٢} + س + ١٢ > ٠

مثال

(٢) حل المتباينة: (س + ٣)^{٢} ⩽ ١٠ − ٣(س + ٣).

الحل

★ ∵ (س + ٣)^{٢} ⩽ ١٠ − ٣(س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦س + ٩ ⩽ ١٠ − ٣س − ٩

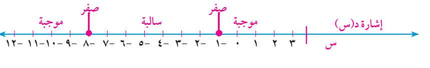
∴ س^{٢} + ٩س + ٨ ⩽ ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى: س^{٢} + ٩س + ٨ = ٠

بالتحليل إلى عوامل: (س + ٨)(س + ١) = ٠

مجموعة حل المعادلة: {−٨، −١}

★ و يوضح خط الأعداد التالى إشارة الدالة د(س) = س^{٢} + ٩س + ٨



وعلى ذلك فإن: مجموعة حل المتباينة هى : [−٨، −١]

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٢٨

إجابات تفكير ناقد صـ (٢٩)

س^{٢} + ٩س + ٨ > ٠

مجموعة حل المتباينة هو]−٨، −١[

مثال إضافى:

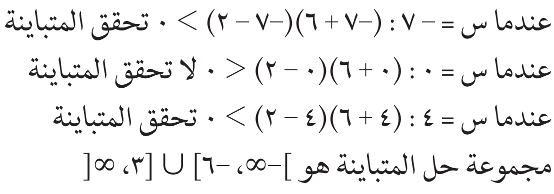
حل المتباينة (س + ٥)(س − ١) ⩾ س + ٧

س^{٢} + ٤س − ٥ = س + ٧

س^{٢} + ٣س − ١٢ = ٠

أى (س + ٦)(س − ٢) = ٠

مجموعة حل المعادلة هى {−٦، ٢}



عندما س = −٧ : (−٧ + ٦)(−٧ − ٢) > ٠ تحقق المتباينة

عندما س = ٠ : (٠ + ٦)(٠ − ٢) > ٠ لا تحقق المتباينة

عندما س = ٤ : (٤ + ٦)(٤ − ٢) > ٠ تحقق المتباينة

مجموعة حل المتباينة هو]−∞، −٦] ∪ [٣، ∞[

أى ح −]−٦، ٣[

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٩)

٢ أ مجموعة الحل هى: ح −]$-\frac{٢٢}{٥}$، ٢[

ب مجموعة الحل هى [−١، −٨]

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

١ المعادلة هى متساوية بين مقدارين، المتباينة هى معادلة مع استخدام رمز المتباينة بدلا من رمز المتساوية.

٢ لتحديد فترات مجموعة الحل للمتباينة.

٣ حل كريم خطأ لأنه أوجد الجذر التربيعى لم يستخدم الإشارة ±.

٤ المعادلة الممثلة للمتباينة هى: س^{٢} + ٩س + ٨ = ٠

(س + ١)(س + ٨) < ٠

مجموعة الحل هى]−١، ٨[

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين

اطلب إلى الطلاب تحديد نقاط تنتمى إلى منطقة حل المتباينة س^{٢} − س −٢ = ٠ والتى وردت في "بند فكر وناقش" ونقاط اخرى لا تنتمى إلى منطقة الحل.

التقييم

أوجد مجموعة حل المتباينة

س(س + ٦) < ٤س + ١٥

حاول أن تحل

٢ حل المتباينات الآتية:

أ ٥س^{٢} + ١٢س ⩽ ٤٤

ب (س + ٣)^{٢} + ٣(س + ٣) − ١٠ ⩽ ٠

تحقق من فهمك

١ ما الفرق بين معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد ومتباينة الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

٢ ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

٣ اكتشف الخطأ: أوجد مجموعة حل المتباينة (س + ١)^{٢} < ٤(٢س − ١)^{٢}

حل يوسف

∵ (س + ١)^{٢} < ٤(٢س − ١)^{٢}

∴ س + ١ < ٢(٢س − ١) وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ −٤س + س + ٢ + ١ < ٠

∴ −٣ س + ٣ < ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى:

−٣س + ٣ = ٠

مجموعة الحل هى {١}

−∞ + + + ١ − − − ∞ د(س) س

★ بحث إشارة الدالة د حيث

د(س) = −٣ س + ٣

مجموعة حل المتباينة هى]١ ، ∞[

حل نور

∵ (س + ١)^{٢} < ٤(٢س − ١)^{٢}

∴ س^{٢} + ٢س + ١ < ١٦س^{٢} − ١٦س + ٤

∴ ١٥س^{٢} − ١٨س + ٣ > ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

∴ ٣(٥س − ١)(س − ١) = ٠

مجموعة الحل هى {١، $\frac{١}{٥}$}

−∞ + + + $\frac{١}{٥}$ − − − − − ١ + + + ∞ د(س) س

★ بحث إشارة الدالة د حيث

د(س) = ١٥ س^{٢} − ١٨ س + ٣

نجد أن:

مجموعة حل المتباينة هى ح − [$\frac{١}{٥}$، ١]

٤ تفكير ناقد: أوجد مجموعة حل المتباينة (س + ٣)^{٢} < ١٠ − ٣ (س + ٣)

الوحدة الثانية

التشابه
Similarity

مقدمة الوحدة

سبق للطالب أن درس مفهوم التشابه وارتباطه بمنطق التناسب، فالشكل المرسوم بمقياس رسم معين يكون مماثلًا تمامًا للشكل الأصلى، لكنه يختلف عنه فى المساحة.

وفى هذه الوحدة سوف يستكمل الطالب دراسته لموضوع التشابه، فيتعرف نظريات تشابه المثلثات ويبرهن صحتها ويستخدمها فى تطبيقات رياضية كالقياس غير المباشر أو فى حل مشكلات حياتية بوضع نموذج رياضى للمشكلة، ثم حله وتفسير النتائج.

وتتضمن هذه الوحدة أربعة دروس هى كالآتى:

الدرس الأول: تشابه المضلعات.

الدرس الثانى: تشابه المثلثات.

الدرس الثالث: العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس الرابع: تطبيقات التشابه فى الدائرة.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: «النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ....».



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...)
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على : (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- قياس زاوية Measure of an Angle
- طول Length
- مساحة Area
- ضرب تبادلى Cross Product
- طرف Extreme
- وسط Mean
- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زوايا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- بديهية Postulate/Axiom
- محيط Perimeter
- مساحة مضلع Area of polygon
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجي مشترك Common External Tangent
- مماس داخلي مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

دروس الوحدة

الدرس (٢ – ١): تشابه المضلعات.

الدرس (٢ – ٢): تشابه المثلثات.

الدرس (٢ – ٣): العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس (٢ – ٤): تطبيقات التشابه فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

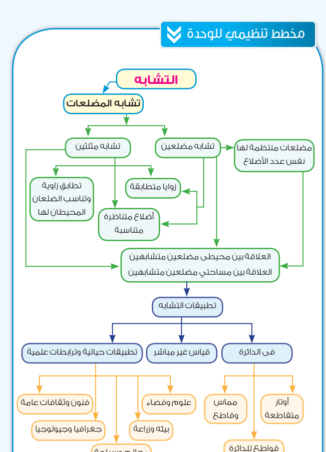
حاسب آلي – جهاز عرض بيانات – برامج رسومية – ورق مربعات – مرآة مستوية – أدوات قياس – آلة حاسبة.

نبذه تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبني، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسى على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوى قياسات نظائرها فى الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح فى بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوى على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتَعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفتافيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

مخطط تنظيمي للوحدة



- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: «المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ....».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: «النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ....».
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على: «إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن.....» وعكسه ونتائج عليه.

زمن تدريس الوحدة

١٦ ساعة.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الاستدلالى – التفكير الناقد – التفكير المنطقى – حل المشكلات – التفكير الإبداعى.

الوسائل التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – حاسب آلى – جهاز عرض بيانات – برامج رسومية – ورق مربعات – مرآة مستوية – أدوات رسم وقياس – آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

التعلم التعاونى – الاكتشاف الموجه – الطريقة الاستنباطية – العصف الذهنى – المناقشة – حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس أو الأنشطة المقترحة – تقييم الوحدة واختبار تراكمى فى نهاية الوحدة.

٢ - ١

تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

خلفية

سبق أن درس الطالب مفهوم التشابه وعرف أن عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه وإن اختلفت فى أطوال أضلاعها فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

فى هذا الدرس نعمق مفهوم تشابه المضلعات لدى الطالب ليتعرف على أنماط مختلفة من المضلعات المتشابهة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد متى يتشابه مضلعان.
- يوجد معامل التشابه لمضلعين متشابهين.
- يتعرف العلاقة بين المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع.
- يحل مسائل على المضلعات المتشابهة.
- يتعرف المستطيل الذهبى والنسبة الذهبية كنشاط على تشابه المضلعات.

مفردات أساسية

مضلعات متشابهة – مثلثات متشابهة – أضلاع متناظرة – زوايا متطابقة – مضلع منتظم – شكل رباعى – شكل خماسى – معامل تشابه – مستطيل ذهبى – نسبة ذهبية.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – حاسب آلى – جهاز عرض بيانات – برامج رسومية – أدوات قياس – ورق رسم.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة – الطريقة الاستنباطية – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٣٤ إلى صفحة ٣٩

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحتى ٢٠، ٢١

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

---

٢ - ١ تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

سوف تتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- مقياس الرسم.
- المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زاويا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب جـ ء وصورته أ' ب' جـ' ء' بتحويل هندسي.

(أ) قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠أ ، ∠أ' – ∠ب ، ∠ب'

∠جـ ، ∠جـ' – ∠ء ، ∠ء'

ماذا تستنتج؟

(ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة $\frac{أ'ب'}{أب}$ ، $\frac{ب'جـ'}{ب جـ}$ ، $\frac{جـ'ء'}{جـ ء}$ ، $\frac{ء'أ'}{ء أ}$

ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت فى أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

المضلعان المتشابهان Similar polygons

تعريف: «يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

لاحظ أن:

١- فى الشكل الموضح ببند فكر وناقش نجد:

(أ) الزوايا المتناظرة متطابقة: ∠أ' ≡ ∠أ ، ∠ب' ≡ ∠ب

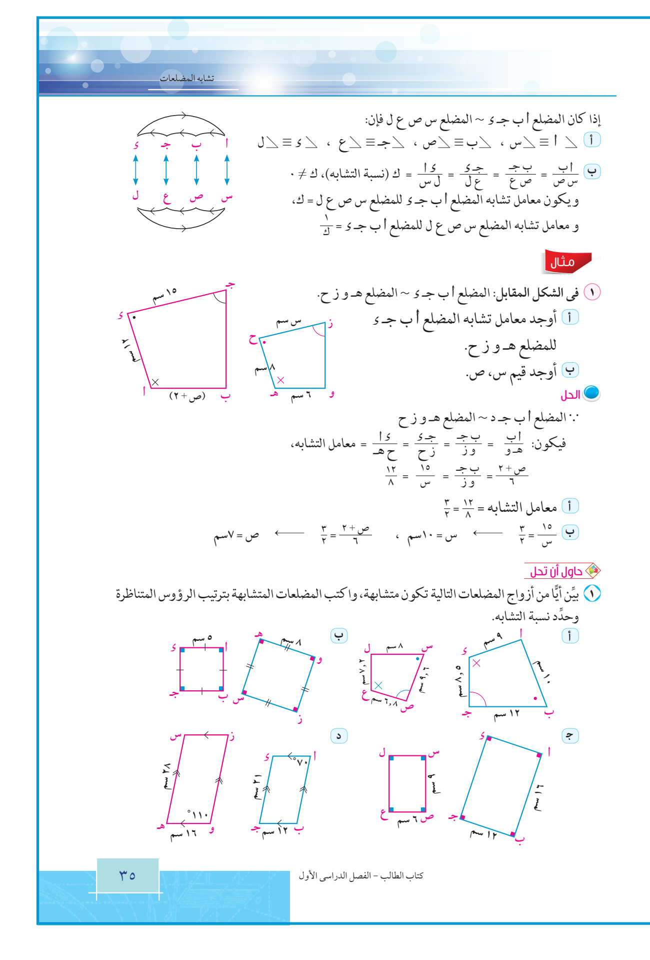
∠جـ' ≡ ∠جـ ، ∠ء' ≡ ∠ء

(ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة: $\frac{أ'ب'}{أب} = \frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \frac{جـ'ء'}{جـ ء} = \frac{ء'أ'}{ء أ}$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ' ب' جـ' ء' يشابه الشكل أ ب جـ ء

٢- نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابة رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

٣٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى



تشابه المضلعات

إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن:

(أ) ∠أ ≡ ∠س ، ∠ب ≡ ∠ص ، ∠جـ ≡ ∠ع ، ∠ء ≡ ∠ل

(ب) $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ ء}{ع ل} = \frac{ء أ}{ل س}$ = ك (نسبة التشابه)، ك ≠ ٠

ويكون معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع س ص ع ل = ك،

و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ ء = $\frac{١}{ك}$

مثال

(١) فى الشكل المقابل: المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع هـ و ز ح.

(أ) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع هـ و ز ح.

(ب) أوجد قيم س، ص.

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون: $\frac{أب}{هـ و} = \frac{ب جـ}{و ز} = \frac{جـ ء}{ز ح} = \frac{ء أ}{ح هـ}$ = معامل التشابه،

$\frac{ص+٢}{٦} = \frac{ب جـ}{و ز} = \frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨}$

(أ) معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

(ب) $\frac{١٥}{س} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ س = ١٠سم ، $\frac{ص+٢}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ ص = ٧سم

حاول أن تحل

(١) بيِّن أيًّا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة وحدِّد نسبة التشابه.

(أ) (ب) (جـ) (د)

٣٥ كتاب الطالب – الفصل الدراسي الأول

فكر

هل جميع المربعات متشابهة؟ هل جميع المعينات متشابهة؟

هل جميع المستطيلات متشابهة؟ هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

١- لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معًا، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرطا التشابه (المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساويًا (واحد) ولكن ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع $م_3$ $\not\equiv$ المضلع $م_4$) كما فى الشكل المقابل.

المضلع $م_1$ $\equiv$ المضلع $م_2$

المضلع $م_3$ ~ المضلع $م_4$

٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

فإذا كان المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_3$،

المضلع $م_2$ ~ المضلع $م_3$

فإن: المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$

٤- كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



(٢) فى الشكل المقابل: $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ء هـ و،

ء هـ = ٨سم ، هـ و = ٩سم ، و ء = ١٠سم

إذا كان محيط $\triangle$ أ ب جـ = ٨١سم.

أوجد أطوال أضلاع $\triangle$ أ ب جـ.

الحل

$\because$ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ء هـ و

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{وء}} = \frac{\text{أب + ب جـ + جـ أ}}{\text{ءهـ + هـ و + وء}} = \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ء هـ و}}$ (خواص التناسب)

ويكون: $\frac{\text{أب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{جـ أ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

$\therefore$ أ ب = ٨ × $\frac{٨١}{٢٧}$ = ٢٤سم ، ب جـ = ٩ × ٣ = ٢٧ ، جـ أ = ١٠ × ٣ = ٣٠سم

لاحظ أن:

إذا كان المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$، فإن $\frac{\text{محيط المضلع } م_1}{\text{محيط المضلع } م_2}$ = نسبة التشابه (معامل التشابه)

٣٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

إجراءات الدرس

التمهيد

- اعرض على طلابك نموذجًا لمضلعين متطابقين ودعهم يستنتجوا شرطى تطابقهما وهما:
  - **١ – أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.**
  - **٢ – قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.**
- مستخدمًا إستراتيجية العصف الذهنى، اطرح التساؤل: ماذا تلاحظ إذا تغير أحد الشرطين فقط:
  - **١ – تساوى قياسات الزوايا المتناظرة للمضلعين.**
  - **٢ – تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين.**

عرض الدرس

- من خلال مناقشة بند "فكر وناقش" ص ٣٤ دع الطلاب يستنتجوا أن قياسات الزوايا المتناظرة للمضلعين أ ب جـ ء، أَ بَ جـَ ءَ متساوية وأن الأضلاع المتناظرة لهما تُكَون التناسب التالى:

$$\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ جـَ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـَ ءَ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ءَ أَ}}{\text{ء أ}} = ك$$

ومن ذلك استنتج متى يتشابه مضلعان، والتعبير عن ذلك باستخدام رمز التشابه (~)

- أكد على طلابك أهمية كتابة رؤوس المضلعات المتناظرة بنفس الترتيب حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.
- اعرض مثال ١ ص ٣٥ وتوصل مع الطلاب إلى قيم س، ص مبديًا أهمية استخدام خواص التناسب فى الحل، اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى حاول أن تحل ١ من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

- اطلب إلى طلابك الإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) هل:

- كل مربعين يكونان متشابهين؟
- كل مثلثين متساو يا الأضلاع يكونان متشابهين؟
- كل المثلثات القائمة الزاوية متشابهة؟
- كل دائرتين تكونان متشابهتين؟

ناقش إجابات الطلاب مع تعزيز الإجابات الصحيحة.

(٢) هل المضلعان المشابهان لثالث متشابهان؟ اطلب من طلابك تفسير إجاباتهم.

(٣) هل جميع المضلعات المنتظمة والتى لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة؟

(٤) إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك إلى طول جسمك فى الصورة تساوى النسبة بينهما فى الحقيقة؟

- ناقش مع طلابك مثال٢ صـ ٣٦ مؤكدًا أن النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تكون مساوية لنسبة تشابهما مستخدمًا فى ذلك خاصية التناسب.

$$\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}$$

ثم اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند "حاول أن تحل" ٢ وتابع إجاباتهم.

تجنب الخطأ

يمكن أن يخطئ الطلاب عند إجراء العمليات الحسابية فى أثناء محاولتهم تخطى بعض الخطوات أو إنجاز الحل بشكل سريع جدًّا:

- ❑ وضح لطلابك أن نسبة التشابه تقارن بين أبعاد لها نفس الوحدات ، وأنه إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ حيث ب ≠ ٠، ء ≠ ٠

فإن: أ × ء = ب × جـ

أى أن حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

فإذا كان $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{١}{٢}$ فإن ٢س = ٥ و يكون س = $\frac{٥}{٢}$

- ❑ من خلال عرض مثال ٣ دع الطلاب يستنتجوا أثر تغير معامل التشابه ك (حيث ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$). فى الحالات التالية:

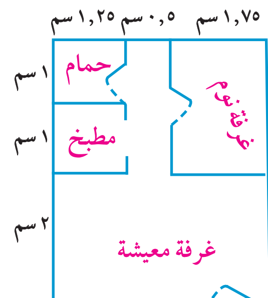
ك > ١ ، ٠ < ك < ١ ، ك < ١

ثم اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٣، ٤ فى إطار تقسيم الطلاب إلى مجموعات عمل ومقارنة حلول هذه المجموعات (عمل تعاونى).

الربط

(١) يستخدم التشابه فى تطبيقات حياتية أهمها مقياس الرسم (معامل التشابه) الذى يستخدم فى عمل خرائط ورسوم هندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقة، حيث مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول فى الرسم}}{\text{الطول الحقيقى}}$ مع ملاحظة التأكيد على:

نسبة التشابه تقارن بين أبعاد لها نفس الوحدة، بينما مقياس الرسم يمكن أن يكون بوحدات مختلفة، فمثلًا يمكن أن يكون ١سم لكل متر، ١سم لكل ١٠٠ متر،....... وهكذا.



- ❑ اطلب إلى الطلاب حساب مساحة غرفة المعيشة فى إحدى الوحدات السكنية المبينة فى الرسم المقابل (مقياس الرسم هو ١سم لكل ٢متر.)

حاول أن تحل

(٢) فى الشكل المقابل:

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(أ) احسب ق(∠س ل ع)، طول $\overline{\text{أ ء}}$

(ب) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ ء = ١٩,٥سم أوجد محيط المضلع س ص ع ل.

(ل، س، ص، ع: ٤,٨ سم، °٨٥، °٧٠، ٨ سم — أ، ب، جـ، ء: °١١٥، ٦ سم)

مثال

(٣) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٥سم، ب جـ = ٨سم، أوجد بُعدَى مستطيل آخر مشابه له إذا كان:

(أ) معامل التشابه = ١,٤ (ب) معامل التشابه = ٠,٦

الحل

بفرض أن المستطيل س ص ع ل ~ المستطيل أ ب جـ ء

فيكون:

$\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ل س}}{\text{ء أ}}$ = معامل التشابه

(أ) عندما يكون معامل التشابه = ١,٤

$\frac{\text{س ص}}{٥} = \frac{\text{ص ع}}{٨} = ١,٤$

∴ س ص = ٧سم ، ص ع = ١١,٢سم

لاحظ أن المستطيل س ص ع ل هو تكبير للمستطيل أ ب جـ ء



(ب) عندما يكون معامل التشابه = ٠,٦

$\frac{\text{س ص}}{٥} = \frac{\text{ص ع}}{٨} = ٠,٦$

∴ س ص = ٣سم ، ص ع = ٤,٨سم

لاحظ أن المستطيل س ص ع ل هو تصغير للمستطيل أ ب جـ ء

معامل التشابه لمضلعين: Similarity ratio of two polygons

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$

إذا كان: ك > ١ فإن المضلع $م_١$ هو تكبير للمضلع $م_٢$

٠ < ك < ١ فإن المضلع $م_١$ هو تصغير للمضلع $م_٢$

ك = ١ فإن المضلع $م_١$ يطابق المضلع $م_٢$

وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

(٤) فى الشكل المقابل:

المضلع $م_١$ يشابه المضلع $م_٣$، المضلع $م_٢$ يشابه المضلع $م_٣$.

(أ) أوجد معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٣$، معامل تشابه المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$.

(ب) هل المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ ؟ ولماذا؟ و إذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ فأوجد معامل التشابه عندئذٍ.

الحل

(أ) معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٣$ = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معامل تشابه المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$ = $\frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

(ب) ∵ المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٣$ ، المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$

∴ المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$

و يكون معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ = $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٣) صورة مستطيلة الشكل بعداها ١٠سم، ١٥سم، أوجد بُعدىَ ومساحة صورة أخرى مشابهة لها إذا كان معامل التشابه ٢,٤.

(٤) من شبكة المثلثات المتطابقة بالشكل أوجد معامل التشابه، واذكر هل يؤدى إلى (تكبير - تصغير - تطابق) لكل من:

(أ) △ل م ن ~ △أ جـ ب

(ب) △ل م ن ~ △ع س ص

(جـ) △أ ء و ~ △ل م ن

(د) △هـ ز أ ~ △جـ ب أ

(هـ) △س ص ع ~ △ب جـ أ

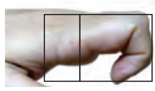
نشاط

النسبة الذهبية The Golden Ratio



انتشرت حديثًا شاشات عرض لأجهزة الحاسب الآلى والتليفزيون بمقاسات نسبة طولها إلى عرضها يقترب من ١٦ : ٩ بدلًا من ٤ : ٣ وقد لاقت قبولًا أكثر لما توفره من راحه للعين أثناء الرؤية فتقترب بذلك من المستطيل الذهبي.

المستطيل الذهبي:



هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه للمستطيل الأصلي، بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعف عرضه، وتسمى النسبة بين طول المستطيل الذهبي إلى عرضه بالنسبة الذهبية.

لإيجاد النسبة الذهبية نعتبر أن طول المستطيل الذهبي أ ب جـ ء هو (س) وعرضه (١) من وحدات الطول وبرسم المربع أ و هـ ء يكون:

المستطيل أ ب جـ ء ~ المستطل هـ و ب جـ

$\frac{أب}{هـو} = \frac{ب جـ}{و ب} \longrightarrow \frac{س}{١} = \frac{١}{س - ١}$

∴ $س^2 - س - ١ = صفر$

وبحل المعادلة التربيعية نجد أن:

$س = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $س = \frac{١ - \sqrt{٥}}{٢} < ٠$ مرفوض

$\simeq ١,٦١٨$

إذًا النسبة الذهبية هى ١,٦١٨ : ١ تقريبًا.

وقد استخدم بعض الفنانين المستطيل الذهبي فى أعمالهم الفنية، ومن بينهم الفنان الشهير ليوناردو دا فينشي (١٤٥٢ – ١٥١٩م) صاحب لوحة «الموناليزا» أو «الجيوكاندا» كما وضع فيبوناتشي (١١٧٠ – ١٢٥٠م) متتابعة الأعداد الشهيرة: ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...

والتي حدها الأول ١، وحدها الثاني ١، وأى حد آخر يساوي مجموع الحدين السابقين له.

أ أكمل المتتابعة إلى عشرة حدود بنفس النمط.

ب قارن بين كل من النسب $\frac{٥}{٣}$، $\frac{٨}{٥}$، $\frac{١٣}{٨}$، .... بالنسبة الذهبية. ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

٥ أ إذا كان بعدا مستطيل ٧,٤٢سم، ١٢سم فهل هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبي؟

ب ما طول مستطيل ذهبي عرضه يساوي ٥سم لأقرب سنتيمتر؟

جـ ما عرض مستطيل ذهبي طوله ١٩٤سم لأقرب سنتيمتر؟

د هل جميع المستطيلات الذهبية متشابهة؟ فسر إجابتك.

تحقق من فهمك



٥ تطبيقات حياتية **فى الشكل المقابل:** إذا كان طول الرجل ١,٨متر قدر ارتفاع كل من: الشجرة – المصباح – المبنى – السيارة ثم بين كيف تتحقق من صحة تقديرك.

٢ **نشاط:** وضح لطلابك مفهوم النسبة الذهبية والمستطيل الذهبى وأهمية الرياضيات فى الفنون واطلب إلى الطلاب البحث من خلال الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن تطبيقات أخرى على النسبة الذهبية والمستطيل الذهبى. واطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٥ ص ٣٩ وتابع إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

١ أ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع ل س ص ع، ك = $\frac{٤}{٥}$

ب المربع أ ب جـ ء ~ المربع هـ و ز س، ك = $\frac{٥}{٨}$

جـ المستطيلان غير متشابهين.

د ▱ أ ب جـ ء ~ ▱ ز و هـ س، ك = $\frac{٣}{٤}$

٢ أ ق(∠ س ل ع) = ٩٠°، أ ء = ٣,٦ سم

ب محيط المضلع س ص ع ل = ١٩,٥ × $\frac{٨}{٦}$ = ٢٦سم.

٣ بعدا الصورة الأخرى: ١٠ × ٢,٤ = ٢٤سم

١٥ × ٢,٤ = ٣٦سم، ومساحتها ٨٦٤ سم^2.

٤ أ $\frac{٣}{٤}$ تصغير ب $\frac{٣}{٢}$ تكبير جـ ١ تطابق

د $\frac{٥}{٤}$ تكبير هـ $\frac{١}{٢}$ تصغير

٥ أ نعم: $\frac{١٢}{٧,٤٢} \simeq ١,٦١٧$ وهي تقترب من النسبة الذهبية.

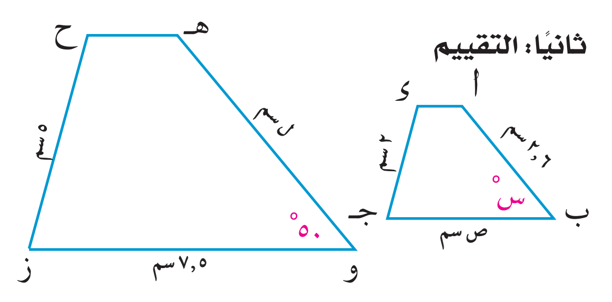
ب ٨ سم جـ ١٢٠ سم د نعم

التدريب والتقييم

أولًا: تحقق من فهمك

ناقش طلابك كيف يمكنهم تقديرارتفاع كل من الشجرة – المصباح – المبنى ... فى إطار مقياس الرسم، مع تنمية قدراتهم على التقدير من خلال مصورات ومجسمات أخرى.

ثانيًا: التقييم



١ إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع هـ و ز ح فأوجد:

أ معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع هـ و ز ح.

ب القيمة العددية لكل من س، ص، ل.

٢ مستطيل بعداه ١٢سم، ٨سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان: معامل التشابه٢.

٣ علبة على شكل مستطيل ذهبى طوله ١٩,٤سم. احسب عرض هذه العلبة بالسنتيمترات.

٤ مستطيلان متشابهان، بعدا الأول ٥سم، ٤سم، ومحيط الثانى ٩٠سم. أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته.

إجابات التقييم

١ أ $\frac{٢}{٥}$ ب س = ٥٠، ص = ٣، ل = ٦,٥

٢ المحيط = ٨٠سم، المساحة = ٣٨٤سم٢

٣ عرض العلبة = $\frac{١٩,٤}{١,٦١٨} \simeq ١٢$سم

٤ طول المستطيل الثانى = ٢٥سم،

مساحته = ٥٠٠سم^2.

أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين:

(١) **هندسة إحداثية:** فى مستوى إحداثي متعامد ارسم الشكل أ ب جـ ى حيث أ (−١، ٠)، ب (٢، ٠)، جـ (٢، ٣)، ى (−١، ٣) و إذا كان س (٤، ٠)، ل (٩، ٠) عين إحداثي النقط ص، ع التي تجعل الشكل أ ب جـ ى يشابه الشكل س ص ع ل قارن إجابتك مع زملائك.

(٢) **هندسة مدنية:** قام بيت خبرة هندسي بتصميم نموذج (ماكيت) لمبنى مكون من ١٠ طوابق متكررة ارتفاع الطابق الواحد ٣,٢ متر، وطابق أرضي ارتفاعه ٥ أمتار فكان ارتفاع المبنى فى النموذج ٧٤سم. أوجد معامل تشابه النموذج مع الأصل. و إذا كان ارتفاع مدخل **البناية فى النموذج هو ٦ سم، كم يكون ارتفاعه الأصلى.**

ثالثًا: التدريب

اطلب من طلابك حل تمارين مختاره من كراسة الأنشطة صفحة ٢٠، ٢١ وتابع حلولهم واطلب إليهم عرض الأفكار المختلفة لحل بعضها.

تقيم أنشطة كتاب الأنشطة والتدريبات

نشاط

اطلب إلى طلابك القيام بالنشاط الموضح صفحة (٢١) من كتاب الأنشطة والتدريبات مع متابعة أعمالهم.

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة ويحصل على نتائج دقيقة.
جيد جدًّا ٨ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة، ولكنه يحتاج لمساعدة طفيفة من المعلم للحصول على نتائج دقيقة
جيد ٧ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط، ولكنه يحصل على بعض النتائج الخطأ.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب بمساعدة المعلم تنفيذ خطوات النشاط ويحصل على بعض النتائج، ولكن بعضها خطأ.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع تنفيذ خطوات النشاط ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

(٥) فى كل من الأشكال التالية المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$.
أوجد معامل تشابه كل من المضلع $م_١$، المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$.

(أ) (ب)

(٦) المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم فى القياس.

(٧) علبة على شكل مستطيل ذهبى طوله ١٦,٢سم. احسب عرض العلبة لأقرب سنتيمتر.

(٨) مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨سم، ١٢سم، ومحيط الثانى ٢٠٠سم. أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته.

نشاط

(٩) هندسة معمارية: يوضح الشكل المقابل مخططًا لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد:
(أ) أبعاد حجرة الاستقبال.
(ب) أبعاد حجرة النوم.
(جـ) مساحة حجرة المعيشة.
(د) مساحة الوحدة السكنية.

حجرة استقبال
حجرة نوم
حجرة معيشة
مطبخ
حمام
٥,٦ سم
٢,٦ سم
٣,٦ سم
٢,٦ سم
٢,٤ سم
٢,٤ سم



٢ - ٢

تشابه المثلثات

Similarity of Triangles

خلفية

سبق تقديم مفهوم تطابق المثلثات وعرف الطالب حالات تطابق المثلثين، وفى هذا الدرس نوجه الطالب إلى اكتشاف ماذا يحدث إذا:

- تطابقت الزوايا المتناظرة فى مثلثين أو بعضها واختلفت أطوال أضلاعها المتناظرة.
- تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أنّ:

- يتعرف مسلمة التشابه «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهان»، ويحل تمارين عليها.
- يتعرف خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر فى المثلث القائم الزاوية.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على:
  «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين».
- يحل تمارين وتطبيقات رياضية على حالات تشابه المثلثات.
- يستخدم تشابه المثلثات فى القياس غير المباشر.

مفردات أساسية

بديهية (مسلمة) - تشابه مثلثين - زوايا متطابقة - أضلاع متناظرة.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - طباشير ملون (أقلام ملونة) - أدوات رسم وقياس - حاسب آلي - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

تعلم تعاونى - اكتشاف موجه - طريقة استنباطية - عرض ومناقشة - حل مشكلات.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٤٠ إلى صفحة ٤٩

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢٢ إلى صفحة ٢٥

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

---

٢ - ٢ تشابه المثلثات Similarity of Triangles

سوف تتعلم
- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر فى المثلث القائم الزاوية.

المصطلحات الأساسيّة
- بديهية Postulate /Axiom

الأدوات والوسائل
- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مرآة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضى طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

ثبت طاليس عصا رأسيًا وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوى الطول الحقيقى للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

أشعة الشمس - ارتفاع الهرم - العصا - ظل العصا - طول ظل الهرم

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساويًا لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم فى أى وقت من يوم مشمس؟ فسّر إجابتك.

عمل تعاونى

١- ارسم △ أ ب جـ الذى فيه: ق(∠أ) = ٥٠°، ق(∠ب) = ٧٠°، أ ب = ٤سم

٢- ارسم △ ء هـ و الذى فيه: ق(∠ء) = ٥٠°، ق(∠هـ) = ٧٠°، ء هـ = ٥سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: $\overline{أجـ}$، $\overline{بجـ}$، $\overline{ءو}$، $\overline{هـو}$

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب $\frac{أجـ}{ءو}$ = $\frac{بجـ}{هـو}$ = $\frac{أب}{ءهـ}$

هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟

قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظاتك.

٤٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

تشابه المثلثات

مسلمة postulate (or axiom)

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

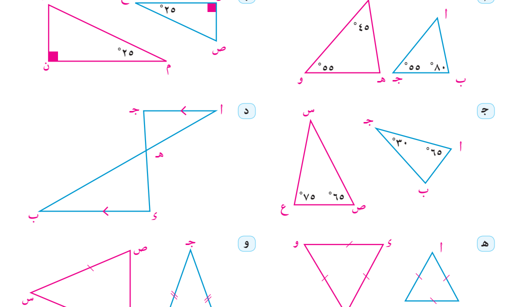
فى الشكل المقابل:

إذا كان ∠أ ≡ ∠ء ، ∠ب ≡ ∠هـ

فإن △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

حاول أن تحل

١ بيّن أيًا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة. اكتب المثلثات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة.



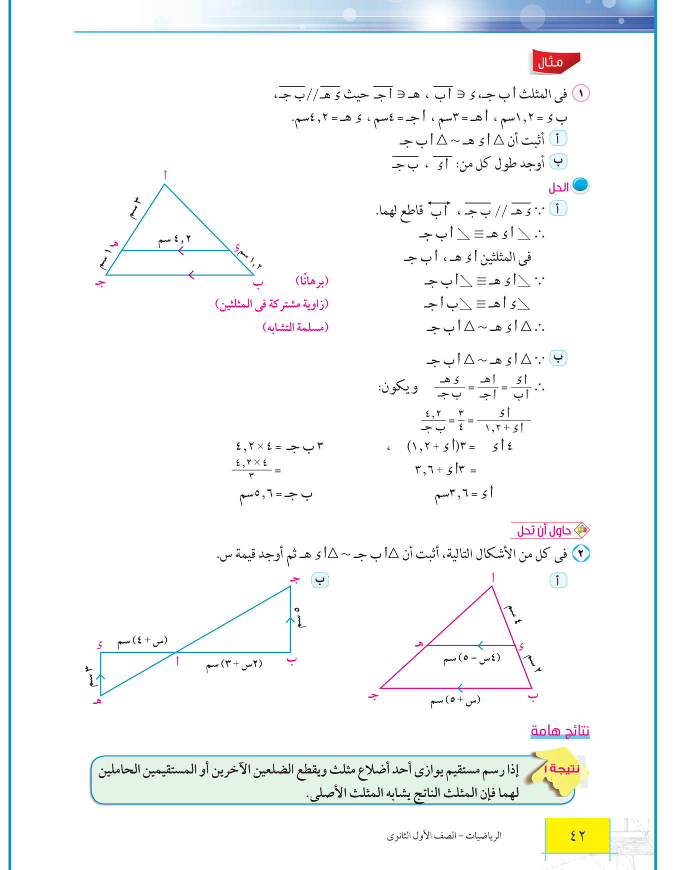
لاحظ أن

١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان. (كما فى هـ)

٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث الآخر: (كما فى و).

٣- يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر (كما فى ب).

٤١ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول



مثال

١ فى المثلث أ ب جـ، ء ∈ أب ، هـ ∈ أجـ حيث ءهـ // ب جـ،
ب ء = ١,٢سم ، أ هـ = ٣سم ، أ جـ = ٤سم ، ء هـ = ٤,٢سم.

أ أثبت أن △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

ب أوجد طول كل من: أء ، ب جـ

الحل

أ ∵ ءهـ // ب جـ ، أب قاطع لهما.

∴ ∠ أ ء هـ ≡ ∠ أ ب جـ (برهانًا)

فى المثلثين أ ء هـ، أ ب جـ

∵ ∠ أ ء هـ ≡ ∠ أ ب جـ

∠ ء أ هـ ≡ ∠ ب أ جـ (زاوية مشتركة فى المثلثين)

∴ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ (مسلمة التشابه)

ب ∵ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ءهـ}{ب جـ}$ ويكون:

$\frac{أء}{أء + ١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{ب جـ}$

٤ أء = ٣(أء + ١,٢) ، ٣ ب جـ = ٤ × ٤,٢

= ٣أء + ٣,٦ ، = $\frac{٤ × ٤,٢}{٣}$

أء = ٣,٦سم ، ب جـ = ٥,٦سم

حاول أن تحل

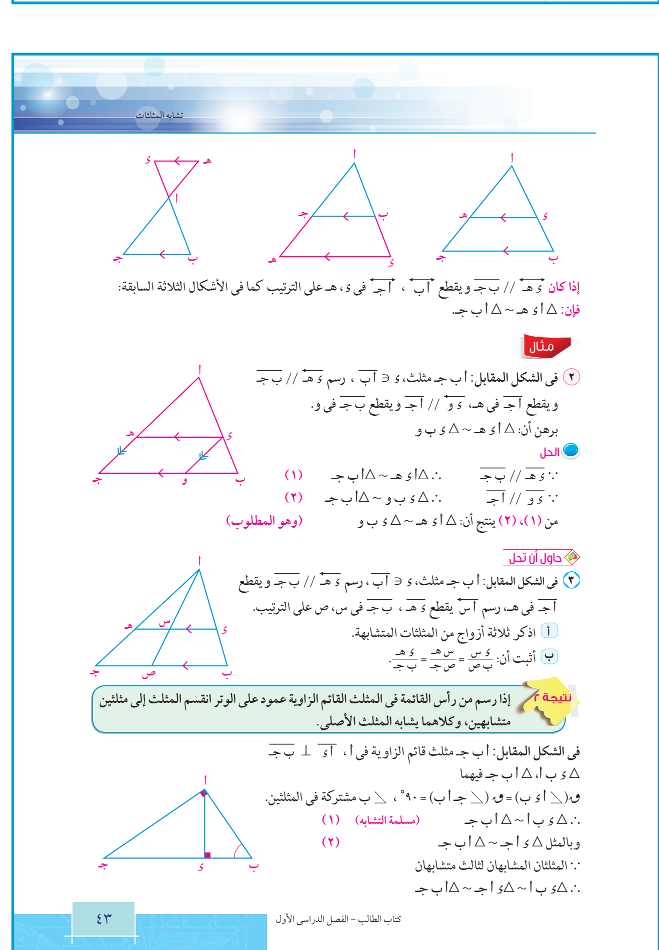
٢ فى كل من الأشكال التالية، أثبت أن △أ ب جـ ~ △أ ء هـ ثم أوجد قيمة س.

أ ب

نتائج هامة

نتيجة ١ إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

٤٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى



تشابه المثلثات

إذا كان ءهـ // ب جـ ويقطع أب ، أجـ فى ء، هـ على الترتيب كما فى الأشكال الثلاثة السابقة:

فإن: △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ.

مثال

٢ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب ، رسم ءهـ // ب جـ
ويقطع أجـ فى هـ، ءو // أجـ ويقطع ب جـ فى و.
برهن أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و

الحل

∵ ءهـ // ب جـ ∴ △أ ء هـ ~ △أ ب جـ (١)

∵ ءو // أجـ ∴ △ ء ب و ~ △أ ب جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و (وهو المطلوب)

حاول أن تحل

٣ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب ، رسم ءهـ // ب جـ ويقطع
أجـ فى هـ، رسم أس يقطع ءهـ ، ب جـ فى س، ص على الترتيب.

أ اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

ب أثبت أن: $\frac{ءس}{ب ص} = \frac{س هـ}{ص جـ} = \frac{ءهـ}{ب جـ}$.

نتيجة ٢ إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، أء ⊥ ب جـ

△ ء ب أ، △ أ ب جـ فيهما

ق(∠ أ ء ب) = ق (∠ جـ أ ب) = ٩٠° ، ∠ ب مشتركة فى المثلثين.

∴ △ ء ب أ ~ △ أ ب جـ (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل △ ء أ جـ ~ △ أ ب جـ (٢)

∵ المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

∴ △ء ب أ ~ △ء أ جـ ~ △أ ب جـ

٤٣ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

إجراءات الدرس

التمهيد

ناقش طلابك فى ظاهرة اختلاف طول ظل شخص يبتعد عن قاعدة عمود إنارة مضاء ليلًا، وكيف ينمذج هذا الموقف هندسيًا. أو كيفية تكون صورة جسم فى آلة التصوير أو خزانة ذات الثقب واستنتاج العلاقات بين العناصر المتناظرة للمثلثات التى يمكن رسمها.

عرض الدرس

- اطلب إلى طلابك تنفيذ العمل التعاونى الموضح صفحة ٤٠ من كتاب الطالب وتحقق من صحة استنتاجهم.
- اطلب إليهم تغير طول ءهـ إلى أطوال مختلفة وملاحظة هل يظل استنتاجهم السابق صحيحًا.
- وضح لطلابك مسلمة التشابه صـ٤١ واطلب إليهم حل حاول أن تحل ١ موضحًا لماذا تتشابه جميع المثلثات متساوية الأضلاع.
- ناقش طلابك فى الشروط الواجب توافرها لتشابه:
  - أ مثلثان متساويا الساقين.
  - ب مثلثان قائما الزاوية.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٢، ٣ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

١ أ △أ ب جـ ~ △ء هـ و

ب △س ص ع ~ △ن ل م

جـ المثلثان غير متشابهين.

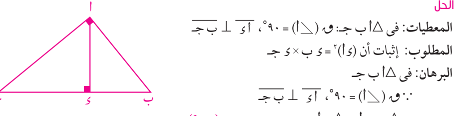
د △أ جـ هـ ~ △ب ء هـ

هـ △أ ب جـ ~ △ء هـ و (إجابات متعددة)

و △جـ أ ب ~ △س ص ع أو △ س ع ص

٢ أ س = ٢,٥سم ب س = ١١سم

٣ أ (△أ ء س ~ △أ ب ص)،
(△أ س هـ ~ △أ ص جـ)،
(△أ ء هـ ~ △أ ب جـ)



مثال

٣ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن ى أ وسط متناسب بين ى ب، ى جـ.

الحل

المعطيات: فى △أ ب جـ: ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن (ى أ)^{٢} = ى ب × ى جـ

البرهان: فى △أ ب جـ

∵ ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

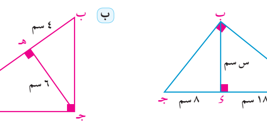
∴ △ى ب أ ~ △ى أ جـ (نتيجة)

ويكون: $\frac{ى أ}{ى جـ} = \frac{ى ب}{ى أ}$ أى أن (ى أ)^{٢} = ى ب × ى جـ

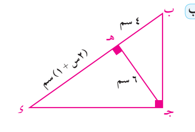
حاول أن تحل

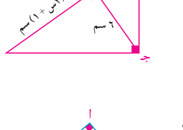
٤ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية:

أ



ب



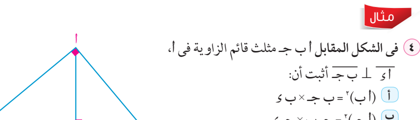


مثال

٤ فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن:

أ (أ ب)^{٢} = ب جـ × ب ى

ب (أ جـ)^{٢} = جـ ب × جـ ى



الحل

فى △أ ب جـ:

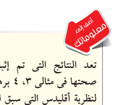
∵ ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

∴ △أ ب ى ~ △جـ ب أ (نتيجة)

∴ $\frac{أ ب}{جـ ب} = \frac{ب ى}{ب أ}$ ويكون: (أ ب)^{٢} = ب جـ × ب ى

، △أ جـ ى ~ △ب جـ أ (نتيجة)

∴ $\frac{أ جـ}{ب جـ} = \frac{جـ ى}{أ جـ}$ ويكون: (أ جـ)^{٢} = جـ ب × جـ ى

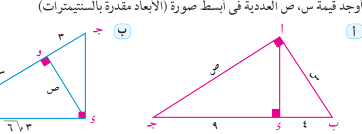


تعد النتائج التى تم إثبات صحتها فى مثالى ٣، ٤ برهانًا لنظرية أقليدس التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية.

تشابه المثلثات

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة س، ص العددية فى أبسط صورة (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات)



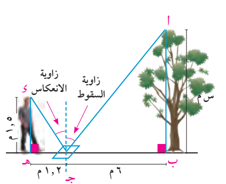
القياس غير المباشر **Indirect measarement**

فى بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة، وفي هذه الحالة يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرق تستخدم خاصية انعكاس الضوء فى المرآة المستوية، كما فى المثال التالى.

مثال

٥ فيزياء: أراد يوسف أن يعرف ارتفاع إحدى الأشجار فوضع مرآة على مسافة ٦ أمتار من قاعدة الشجرة، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى قمة الشجرة فى وسط المرآة - عند هذه النقطة كان يوسف قد تحرك بعيدًا عن المرآة مسافة ١,٢ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق سطح الأرض. فإذا كانت قدماه والمرآة وقاعدة الشجرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الشجرة. علمًا بأن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.



الحل

بفرض أن ارتفاع الشجرة س مترًا، قياس زاوية السقوط = θ°

∴ قياس زاوية الانعكاس = θ°

فى المثلثين أ ب جـ، ى هـ جـ

ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٩٠°

ق (∠أ جـ ب) = ق (∠ى جـ هـ) = (٩٠ − θ)°

∴ △أ ب جـ ~ △ى هـ جـ ويكون: $\frac{أ ب}{ى هـ} = \frac{ب جـ}{هـ جـ}$

∴ $\frac{س}{١,٥} = \frac{٦}{١,٢}$ ويكون س = ٧,٥ متر

أي أن ارتفاع الشجرة يساوي ٧,٥ مترًا.

تجنب الخطأ

- □ قد يخطئ الطلاب فى كتابة أسماء المثلثات المتشابهة.
- □ نبه طلابك إلى أهمية كتابة عناصر المثلثين المتناظرة بنفس الترتيب.
- □ وضح لطلابك خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر فى المثلث القائم الزاوية من خلال عرض نتيجة٢ صـ٤٣، ومناقشة مثال ٣، ٤ صـ ٤٤.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل٤، ٥ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٤ أ س^{٢} = ١٨ × ٨ = ١٤٤ ∴ س = ١٢سم

ب ٤(٢س + ١) = ٣٦ ∴ س = ٤سم

٥ أ س^{٢} = ٤(٤ + ٩) س = ٢$\sqrt{١٣}$ سم،

ص = ٩(٩ + ٤) س = ٣$\sqrt{١٣}$ سم

ب (٣$\sqrt{٦}$)^{٢} = س(س + ٣)

س^{٢} + ٣س − ٥٤ = ٠

(س − ٦)(س + ٩) = ٠ س = ٦سم،

ص^{٢} = ٣ × ٦ ص = ٣$\sqrt{٢}$ سم

تجنب الخطأ

- □ قد يخطئ الطلاب فى حل معادلة الدرجة الثانية. ذكر الطلاب بإمكانية حل معادلات الدرجة الثانية بالتحليل إن أمكن أو باستخدام القانون العام س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$ بعد وضع المعادلة على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠.

الربط

- □ يمكن الربط بين الرياضيات والفيزياء فى القياس غير المباشر من خلال تذكير الطلاب بخاصية انعكاس الضوء على سطح مرآة مستوية فيكون: قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس

- وضح لطلابك أهمية استخدام التشابه في تطبيقات حياتية مثل قياس مسافة أو ارتفاع معين بطرق غير مباشرة، كما في مثال ٥ ص ٤٥ من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند حاول أن تحل ٦ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٦ أ $\frac{\text{س}}{\text{١,٤٨}} = \frac{\text{١٢٥}}{\text{١}}$ $\therefore$ س = ١٨,٥ مترًا

ب $\frac{\text{س}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٥}}$ $\therefore$ س = ١٢,٨ مترًا

جـ $\frac{\text{س}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤٠}}{\text{٨}}$ $\therefore$ س = ٣٠ مترًا

د $\frac{\text{س}}{\text{٨٠}} = \frac{\text{٤٠}}{\text{٤٠ + ٦٠}}$ $\therefore$ س = ٣٢ مترًا

تعلم تعاوني

- باستخدام شفافيات أو برنامج باور بوينت PPT قدم لطلابك صور من مثلثات أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة. وبتحريك هذه الشافيات أو الشرائح واستخدام طريقة الاكتشاف الموجه توصل مع طلابك إلى نص نظرية ١ التالي: «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما متشابهان».

- ناقش مع طلابك برهان النظرية وتأكد من فهمهم للنظرية من خلال مناقشة مثال ٦، ٧ صفحة ٤٧.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند حاول أن تحل ٧ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٧ $\because \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب جـ}}$ $\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب أ}}$ (١)

$\because \frac{\text{ب ى}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}}$ $\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب ى}}$ (٢)

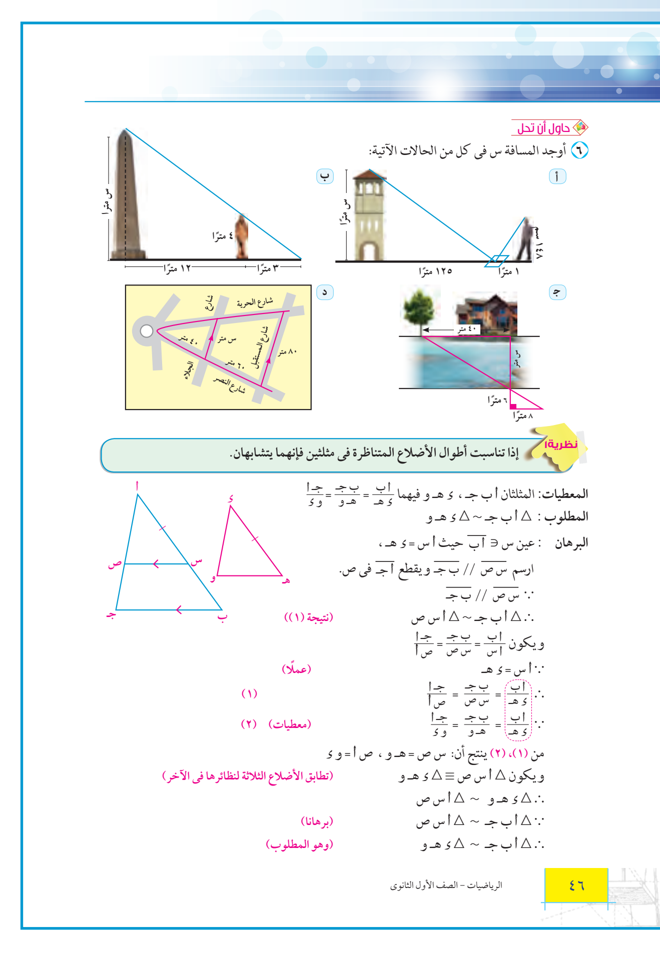
من (١)، (٢) $\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب ى}}$

$\therefore \triangle$ ب جـ هـ = $\triangle$ ى أ ب

ويكون:

ق(∠ جـ ب هـ) = ق(∠ أ ى ب) $\therefore$ أ ى // ب جـ

ق(∠ ب هـ جـ) = ق(∠ ى ب أ) $\therefore$ أ ب // جـ هـ


حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة س في كل من الحالات الآتية:

نظرية إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

المعطيات: المثلثان أ ب جـ، ى هـ و فيهما $\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}$

المطلوب: $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ى هـ و

البرهان: عين س ∈ أ ب حيث أ س = ى هـ،

ارسم س ص // ب جـ ويقطع أ جـ في ص.

$\because$ س ص // ب جـ

$\therefore \triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ س ص (نتيجة (١))

ويكون $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$

$\because$ أ س = ى هـ (عملًا)

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$ (١)

$\because \frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}$ (معطيات) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: س ص = هـ و ، ص أ = و ى

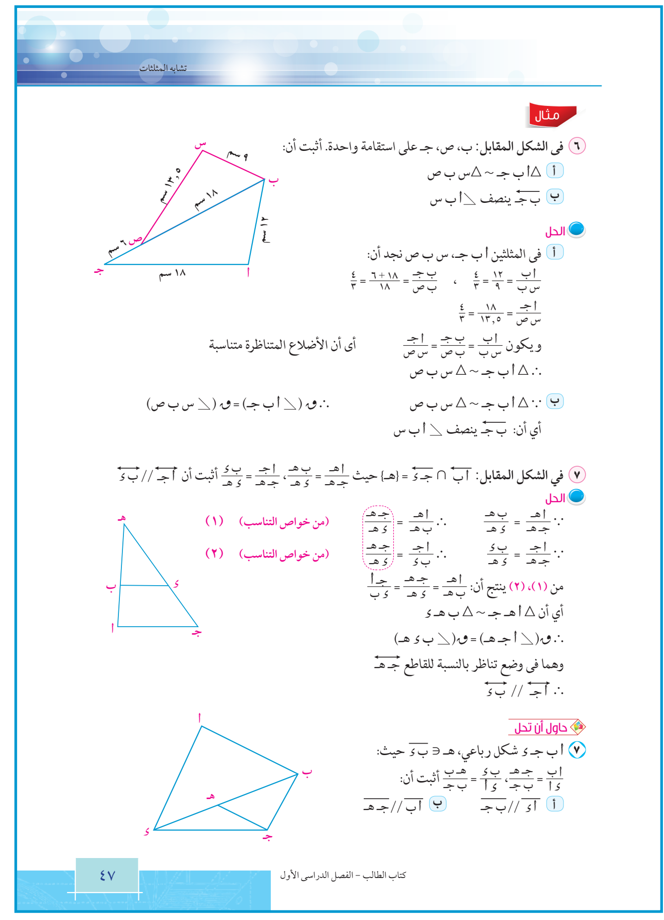
ويكون $\triangle$ أ س ص ≡ $\triangle$ ى هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها في الآخر)

$\therefore \triangle$ ى هـ و ~ $\triangle$ أ س ص

$\because \triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ س ص (برهانا)

$\therefore \triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ى هـ و (وهو المطلوب)

٤٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوي


تشابه المثلثات

مثال

٦ في الشكل المقابل: ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:

أ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ س ب ص

ب ب جـ ينصف ∠ أ ب س

الحل

أ في المثلثين أ ب جـ، س ب ص نجد أن:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٩}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{١٨ + ٦}}{\text{١٨}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{١٨}}{\text{١٣,٥}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

ويكون $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ص}}$ أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\therefore \triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ س ب ص

ب $\because \triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ س ب ص $\therefore$ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ س ب ص)

أي أن: ب جـ ينصف ∠ أ ب س

٧ في الشكل المقابل: أ ب ∩ جـ ى = {هـ} حيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ى هـ}}$، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى هـ}}$ أثبت أن أ جـ // ب ى

الحل

$\because \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ى هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}}$ (من خواص التناسب) (١)

$\because \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}}$ (من خواص التناسب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ى ب}}$

أي أن $\triangle$ أ هـ جـ ~ $\triangle$ ب هـ ى

$\therefore$ ق(∠ أ جـ هـ) = ق(∠ ب ى هـ)

وهما في وضع تناظر بالنسبة للقاطع جـ هـ

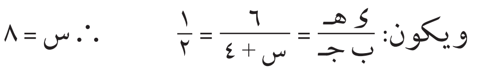
$\therefore$ أ جـ // ب ى

حاول أن تحل

٧ أ ب جـ ى شكل رباعي، هـ ∈ ب ى حيث: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب جـ}}$، $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}}$ أثبت أن:

أ أ ى // ب جـ ب أ ب // جـ هـ

٤٧ كتاب الطالب – الفصل الدراسي الأول



نظرية ٢ إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.

المعطيات: ∠ أ ≡ ∠ ء ، $\frac{\text{اب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$

المطلوب: Δ اب جـ ~ Δ ء هـ و

البرهان: خذ س ∈ اب‾ حيث اس = ء هـ

وارسم س ص ↔ // ب جـ‾

ويقطع اجـ‾ فى ص

∵ س ص‾ // ب جـ‾ ∴ Δ اب جـ ~ Δ اس ص (نتيجة) (١)

ويكون $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{اص}}$

∵ $\frac{\text{اب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$ (معطى) ، اس = ء هـ (عملا)

∴ $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$ ويكون اص = ء و

∴ Δ اس ص ≡ Δ ء هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون Δ اس ص ~ Δ ء هـ و (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: Δ اب جـ ~ Δ ء هـ و وهو المطلوب.

مثال

٨ اب جـ مثلث، اب = ٨سم ، اجـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، هـ ∈ اب‾ حيث اهـ = ٢سم ، ء ∈ ب جـ‾ حيث ب ء = ٤سم.

أ برهن أن Δ ب ء هـ ~ Δ ب ا جـ واستنتج طول ء هـ‾.

ب برهن أن الشكل ا جـ ء هـ رباعى دائرى.

الحل

∵ اب = ٨سم ، اهـ = ٢سم ∴ ب هـ = ٦سم

أ المثلثان ب ء هـ ، ب ا جـ فيهما:

∠ ء ب هـ ≡ ∠ ا ب جـ (١)

، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب ا جـ (نظرية)

من التشابه $\frac{\text{ءهـ}}{\text{اجـ}} = \frac{1}{2}$ ∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ا جـ ، ء هـ = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$سم

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٤٨

- اطلب إلى طلابك حل تمرين ١٠، ١١، ١٢ من كراسة الأنشطة والتدريبات صفحة ٢٤ وتابع حلولهم.
- اعرض لطلابك نظرية (٢) وبرهانها صـ٤٨ وناقش معهم حل مثالى ٨، ٩ مذكرًا لهم بخواص الشكل الرباعى الدائرى.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٨، ٩ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٨ أ Δ أ هـ ء ~ Δ ب هـ جـ ∴ س = ٧٥

ب ∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب جـ أ ∴ ص = ٣

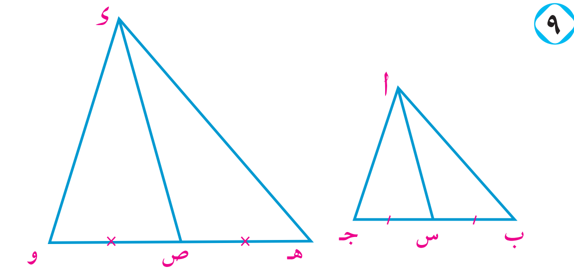
جـ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{1}{2}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ

ويكون: $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{6}{\text{س} + 4} = \frac{1}{2}$ ∴ س = ٨

ص + ١ = س − ٣ ∴ ص = ٤

٩



∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

∴ ∠ ب ≡ ∠ هـ

$\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$

∵ ب س = $\frac{1}{2}$ ب جـ،

هـ ص = $\frac{1}{2}$ هـ و

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}}$

∵ ∠ ب ≡ ∠ هـ، $\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}}$

∴ Δ أ ب س ~ Δ ء هـ ص (المطلوب فى أ)

من التشابه ينتج أن:

$\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أس}}{\text{ء ص}}$

∴ أس × ء هـ = أب × ء ص (المطلوب فى ب)

التدريب والتقييم

أولًا: حل تحقق من فهمك:

أ ∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب (نظرية ٢)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{1}{3}$ ∴ ب جـ = ١,٥ كم

ب ∵ أب‾ ⊥ أجـ‾ ، أء‾ ⊥ ب جـ‾

∴ Δ أ ء ب ~ Δ جـ ء أ، ويكون: $\frac{\text{أء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$

∵ $\frac{8}{5} = \frac{\text{س}}{8}$ ∴ س = ١٢,٨ مترًا

ثانيًا: التقييم

١ في الشكل المقابل:

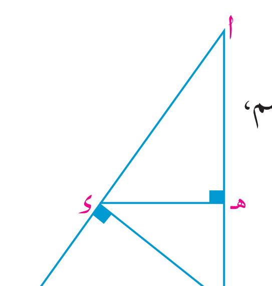
‾أ ب ∩ ‾جـ ى = {هـ}

أثبت أن:

△أ ى هـ ~ △جـ ب هـ

ثم أوجد طول الوتر ‾جـ ى .

٢ في الشكل المقابل:



أ إذا كان ب جـ = ٤ سم،

جـ ى = ٢سم.

أوجد طول كل من:

‾أ ى ، ‾ب ى .

ب إذا كان أ هـ = ١٢سم،

هـ ب = ٣سم ، أوجد طول ‾ب جـ

٣ في الشكل المقابل:

‾أ ب قطعة مستقيمة

مماسة للدائرة،

‾أ جـ يقطع الدائرة

في جـ، ى، $\frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{٤}{٥}$

أ أثبت أن: △أ ب جـ ~ △ب ى جـ.

ب احسب طول ‾ب جـ

إجابات التقييم:

١ ٧,٤سم

٢ أ أ ى = ٦ سم، ب ى = ٢$\sqrt{٣}$ سم

ب ٧,٥ سم

٣ من تشابه المثلثين أ ب جـ، ب ى جـ

ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ب جـ ى) = ٩٠°

ويكون ب جـ = ٦سم.

ثالثًا: التدريب

اطلب من طلابك حل تمارين مختارة من كراسة الأنشطة والتدريبات صفحات ٢١، ٢٢، ٢٣ وتابع حلولهم.

ب من التشابه أيضًا ∠ب ى هـ ≡ ∠ب أ جـ ∴ ق(∠ب ى هـ) = ق(∠ب أ جـ)

∵ ∠ب ى هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ جـ ى هـ ∴ الشكل أ جـ ى هـ رباعي دائري.

حاول أن تحل

٨ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسرًا إجابتك.

أ ب ج

مثال

٩ أ ب جـ مثلث، ى ∈ ‾ب جـ حيث (أ جـ)^{٢} = جـ ى × جـ ب أثبت أن: △أ جـ ى ~ △ب جـ أ

الحل

المثلثان أ ب جـ، ى أ جـ فيهما ∠جـ مشتركة (١)

∵ (أ جـ)^{٢} = جـ ى × جـ ب

∴ $\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{جـ ى}{أ جـ}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن △أ جـ ى ~ △ب جـ أ (نظرية)

حاول أن تحل

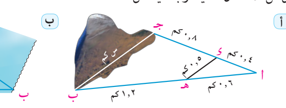
٩ أ ب جـ، ى هـ و مثلثان متشابهان، س منتصف ‾ب جـ، ص منتصف ‾هـ و أثبت أن:

أ △أ ب س ~ △ى هـ ص ب أ س × ى هـ = أ ب × ى ص

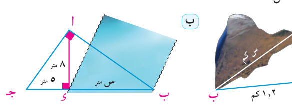
تحقق من فهمك

في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س.

أ



ب



تقيم أنشطة كتاب الأنشطة والتدريبات

نشاط

اطلب إلى طلابك القيام بالنشاط الموضح صفحة (٢٥) من كتاب الأنشطة والتدريبات مع متابعة أعمالهم.

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة، ويحصل على نتائج دقيقة.
جيد جدًّا ٨ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة، ولكنه يحتاج لمساعدة طفيفة من المعلم للحصول على نتائج دقيقة
جيد ٧ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط، ولكنه يحصل على بعض النتائج الخطأ.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب بمساعدة المعلم تنفيذ خطوات النشاط ويحصل على بعض النتائج، ولكن بعضها خطأ.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع تنفيذ خطوات النشاط، ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

٢ - ٣

العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

The Relation Between The Area Of Two Similar Polygons

خلفية

يمكن بمعرفة مقياس رسم خريطة أن تحدد المسافات الحقيقية بين موقعين عليها بمعرفة البعد بينهما على الخريطة، ثم حساب البعد الحقيقي المناظر. فهل يمكن بمعرفة مساحة منطقة محددة على خريطة حساب مساحتها الحقيقية؟ هذا ما نوضحه فى هذا الدرس.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على:
  «النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على:
  «النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على:
  «النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يحل تمارين وتطبيقات حياتية تتضمن مساحات الأشكال المتشابهة وتحديد المساحة الحقيقية لمنطقة ما فى خريطة إذا علم مقياس رسم الخريطة.

مفردات أساسية

محيط - مساحة - مساحة مضلع - أضلاع متناظرة.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - طباشير ملون (أقلام ملونة) - أدوات رسم وقياس - حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

تعلم تعاونى - اكتشاف موجه - عرض ومناقشة - حل مشكلات..

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٥٠ إلى صفحة ٥٧

كتاب الأنشطة والتدريبات والتدريبات صفحتى ٢٦، ٢٧

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

---

٢ - ٣ العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة



على ورق مربعات رسم كل من المثلثين أ ب جـ ، س ص جـ.

١- بين لماذا يكون: △ س ص جـ ~ △أ ب جـ؟ أوجد معامل التشابه عندئذٍ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص جـ إلى مساحة المثلث الأصلى أ ب جـ

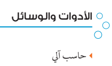
٣- عين نقطة أخرى مثل ء ∈ $\overline{\text{أجـ}}$، ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ءء}'}$ // $\overline{\text{أب}}$ ويقطع $\overline{\text{بجـ}}$ فى ء′ لتحصل على المثلث ء ء′ جـ، هل △ ء ء′ جـ ~ △ س ص جـ؟

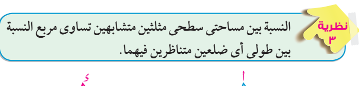
٤- أكمل الجدول التالي:

المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
△ س ص جـ ~ △أ ب جـ	$\frac{١}{٣}$	٤	٣٦	$\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$
△ ء ء′ جـ ~ △ أ ب جـ				
△ س ص جـ ~ △ ء ء′ جـ				

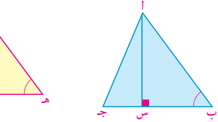
٥- ماذا تعنى النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

أولًا: النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين:





النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



المعطيات: △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

لاحظ: الرمز م يعبر عن مساحة سطح المضلع

المطلوب: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـأ}}{\text{وء}}\right)^{٢}$

البرهان: ارسم $\overleftrightarrow{\text{أس}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{أس}} \cap \overline{\text{بجـ}} = \{\text{س}\}$،
$\overleftrightarrow{\text{ءص}} \perp \overline{\text{هـو}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{ءص}} \cap \overline{\text{هـو}} = \{\text{ص}\}$

∵ △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ)، $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{وء}}$ (١)

فى المثلثين أ ب س، ء هـ ص:

ق(∠س) = ق(∠ص) = ٩٠° ، ق(∠ب) = ق(∠هـ)

∴ △أ ب س ~ △ء هـ ص (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{ءص}}$ (٢)

$\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \frac{\frac{١}{٢}\text{بجـ} \times \text{أس}}{\frac{١}{٢}\text{هـو} \times \text{ءص}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} \times \frac{\text{أس}}{\text{ءص}}$

بالتعويض من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} \times \frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـأ}}{\text{وء}}\right)^{٢}$ وهو المطلوب.

لاحظ أن: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{ءص}}$

فيكون: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أس}}{\text{ءص}}\right)^{٢}$

أى أن النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

تفكير ناقد:

١- إذا كان △أ ب جـ ~ △ء هـ و، ل منتصف $\overline{\text{بجـ}}$، م منتصف $\overline{\text{هـو}}$.
هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أل}}{\text{ءم}}\right)^{٢}$؟
فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

٢- إذا كان △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و،
$\overrightarrow{\text{أن}}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{\text{بجـ}}$ فى ن،
$\overrightarrow{\text{ءع}}$ ينصف ∠ء ويقطع $\overline{\text{هـو}}$ فى ع.
هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أن}}{\text{ءع}}\right)^{٢}$؟
فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

إجراءات الدرس

التمهيد

- اعرض على طلابك المشكلة التالية:

يستهلك نقاش ٢جالون من الطلاء لدهان حائط على شكل مستطيل. إذا أراد العامل دهان حائط آخر على شكل مستطيل بعداه ضعف بعدى المستطيل الأول، وبنفس المواصفات. كم يستهلك العامل من الطلاء؟

- استقبل إجابات الطلاب واترك فرصة للمداخلات والتعليق.

عرض الدرس

- اطلب إلى طلابك تنفيذ ما رد فى بند فكر وناقش صـ٥٠ ومقارنة النسبة بين مساحتى كل مثلثين ومعامل تشابهما وسجل ملاحظاتهم ودعهم يكتشفوا أن النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين كالنسبة بين مربع نسبة تشابهما، وهذا ما توضحة نظرية (٣)
- اعرض لطلابك نص نظرية (٣) وناقش معهم كيفية استنباط برهانها.
- اطلب إلى طلابك التحقق من صحة العلاقات التالية:

١- النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

٢- النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما.

نشاط للفائقين

إذا علمت أن

م(△أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ أ ب × ب جـ × جا ب

أثبت صحة النظرية السابقة

نلاحظ أن:

إذا كان:

△أ ب جـ ~ △س ص ع

فإن:

∠ب ≡ ∠ص، $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ = نسبة التشابه

∴ $\frac{\text{م(△أ ب جـ)}}{\text{م(△س ص ع)}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ أ ب × ب جـ جا ب}}{\frac{1}{2}\text{ س ص × ص ع جا ص}}$

= $\frac{\text{أ ب × ب جـ}}{\text{س ص × ص ع}}$ (لأن جا ب = جا ص)

= $\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^2$ (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

مثال

١ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

حيث $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{3}{4}$، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ.

إذا كانت مساحة △أ ب جـ = ٧٨٤سم². أوجد:

(أ) مساحة △أ ء هـ. (ب) مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ.

الحل

فى △أ ء جـ: ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △أ ء هـ ~ △أ ب جـ (نتيجة)

∴ $\frac{\text{م(△أ ء هـ)}}{\text{م(△أ ب جـ)}} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}\right)^2$ (نظرية)

ويكون $\frac{\text{م(△أ ء هـ)}}{784} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$ ∴ م(△أ ء هـ) = ٧٨٤ × $\frac{9}{49}$ = ١٤٤سم²

∵ مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ = مساحة △أ ب جـ - مساحة △أ ء هـ

∴ مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ = ٧٨٤ - ١٤٤ = ٦٤٠سم²

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ منصف ∠أ ب ء

، م(△أ ب جـ) = ٤٨ سم²

أوجد: م(△هـ ب ء)

مثال

٢ النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن △أ ب جـ ~ △ء هـ و

∴ $\frac{\text{م(△أ ب جـ)}}{\text{م(△ء هـ و)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ويكون $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{2}{3}$

∵ $\frac{\text{محيط △أ ب جـ}}{\text{محيط △ء هـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{2}{3} < 1$

∴ محيط △أ ب جـ < محيط △ء هـ و

ويكون $\frac{\text{محيط (△أ ب جـ)}}{90} = \frac{2}{3}$ ∴ محيط △أ ب جـ = ٦٠سم

٥٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التقييم المستمر

- ناقش مع طلابك الأمثلة الموضحة ص ٥٢ من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل مع متابعة إجاباتهم وتصحيح ما ورد من أخطاء فردية فى حينها.

إجابات حاول أن تحل

١ فى △△أ ب جـ، ء ب هـ

ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب هـ)،

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

∴ △أ ب جـ ~ △ء ب هـ

∴ $\frac{\text{م(△أ ب جـ)}}{\text{م(△ء ب هـ)}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\frac{48}{\text{م(△ء ب هـ)}} = \frac{16}{25}$

∴ م(△ء ب هـ) = $\frac{25 \times 48}{16}$ = ٧٥سم²

حاول أن تحل

٢) اب جـ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، $\frac{\text{م}(\triangle \text{ا ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{٣}{٤}$

أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٤٥$\sqrt{٣}$ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.

ب) إذا كان هـ و = ٢٨سم أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



مثال

٣) إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث ا ب جـ لأقرب كيلو متر مربع إذا كان م(△ا ب جـ) = ٦,٤سم^2

الحل

مقياس الرسم = معامل التشابه = $\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}$

$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ا ب جـ}}{\text{المساحة الحقيقية}}$ = مربع معامل التشابه

$\frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}} = \left(\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}\right)^{٢}$

المساحة الحقيقة = ٦,٤ × ١٠ × ١٠ × ١٠^{٥} × ١٠^{٥} سم^2

≃ ٦٤٠ كم^2

حاول أن تحل

٣) أ) فى الخريطة المبينة أعلاه احسب مساحة المثلث ء هـ و بالسنتيمترات المربعة واستخدامها فى تقدير المساحة الحقيقية التي يمثلها لأقرب كيلو مربع.

ب) باستخدام إحدى خرائط جمهورية مصر العربية احسب مساحة شبه جزيرة سيناء لأقرب مائة كيلو متر مربع - قارن إجابتك مع زملائك.

ثانيًا النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين The ratio between the area of two similar polygons

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك لبحث إمكانية تقسيم المضلعين المتشابهين إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

١- ارسم مضلعات متشابهة كما فى شكل (١)، شكل (٢).

٢- فى شكل (١) ارسم $\overleftarrow{\text{ا جـ}}$. ماذا تلاحظ؟

ء جـ جـ/ ا ب/ ب
شكل (١)

٢) أ) ∵ △ا ب جـ ~ △ء هـ و

$\frac{\text{م}(\triangle \text{ا ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{محيط } (\triangle \text{ا ب جـ})}{\text{محيط } (\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} < ١$

∴ محيط (△ا ب جـ) < محيط (△ء هـ و)

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٤٥\sqrt{٣}}{\text{محيط } (\triangle \text{ء هـ و})}$

∴ محيط (△ء هـ و) = ٩٠ سم

ب) ∵ هـ و = ٢٨سم، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب جـ = ١٤$\sqrt{٣}$ سم

تجنب الخطأ

قد لايدرك الطالب أن النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين كالنسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة لهما.

وضح لطلابك إنه إذا كان△ ا ب جـ ~ △ ء هـ و

فإن $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{ا ب + ب جـ + ا جـ}}{\text{ء هـ + هـ و + ء و}}$

$= \frac{\text{محيط } \triangle \text{ا ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ء هـ و}}$

- وضح لطلابك أن الشكل المرسوم بمقياس رسم معين يكون مماثلًا تمامًا للشكل الأصلى، لكنه يختلف معه فى المساحة، أى أنه يكون مشابهًا له، بذلك نجد:

$\frac{\text{المساحة فى الرسم}}{\text{المساحة الحقيقة}}$ = مربع مقياس الرسم

وبمعرفة مقياس رسم خريطة يمكن تعين المساحة الحقيقية لأى منطقة عليها بعد تحديد مساحتها على الرسم.

- ناقش مع طلابك مثال ٣ الموضح فى صفحة ٥٣ واطلب إليهم الدخول إلى برنامج Google Earth وتحديد المساحات لبعض المناطق الجغرافية: دول - بحيرات - جزر... وحساب مساحتها مع ملاحظة أن مقياس رسم الخريطة يتغير وفق تصغير أو تكبير الخريطة، إلا أن المساحة الحقيقية لنفس المنطقة تكون ثابتة.

التدريب

اطلب إلى طلابك حل تمارين مختارة من كراسة التدريبات صـ٢٦.

تعلم تعاونى

- من خلال ما ورد فى بند تعلم تعاونى صـ ٥٣ وضح للطلاب الحقيقة التالية:
المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره.

- انتقل إلى نظرية (٤) وناقش الطلاب فى برهانها موضحًا الخواص التالية:

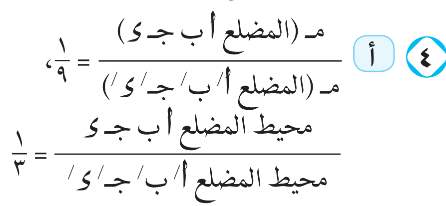
$\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب، $\left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ا/ ب/}}\right)^{٢} = \frac{(\text{ا ب})^{٢}}{(\text{ا/ ب/})^{٢}}$

لتذكرة الطلاب بها واستخدامها فى برهان النظرية.

التقييم المستمر

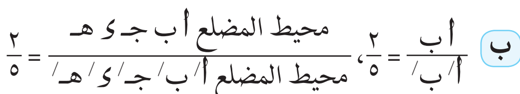
اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ص ٥٥ كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل ٤



٤) أ) $\frac{\text{م (المضلع ا ب جـ ء)}}{\text{م (المضلع ا/ ب/ جـ/ ء/)}} = \frac{١}{٩}$،

$\frac{\text{محيط المضلع ا ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع ا/ ب/ جـ/ ء/}} = \frac{١}{٣}$



ب $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{2}{5}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ'}} = \frac{2}{5}$

جـ ∵ $\frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \frac{1}{4}$ ،

∴ $\frac{\text{مساحة المضلع الأول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \frac{1}{16}$

∵ مساحة المضلع الأول = ٢٥ سم²

∴ مساحة المضلع الثاني = ٤٠٠ سم²

د ∵ المضلع الأول ~ المضلع الثاني

∴ $\frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

∴ $\frac{م_1}{م_2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ حيث $م_1 < م_2$

$\frac{135}{م_2} = \frac{9}{16}$

ويكون $م_2 = \frac{135 \times 16}{9} = 240$ سم²

ناقش طلابك فى مثال ٤ ومثال ٥ صفحتى ٥٥، ٥٦ موضحًا للطلاب أن:

إذا كان: س ص = $\frac{3}{4}$ أ ب   فإن: $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{3}{4}$

وهذا لايعنى أن س ص = ٣، أ ب = ٤ ولكن النسبة بينهما ٣ : ٤

ويمكن كتابة س ص = ٣ك، أ ب = ٤ك حيث ك ≠ ٠

التقويم المستمر (الربط بالزراعة):

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ص ٥٦ مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل

٥ $\frac{\text{مساحة المزرعة الأولى } م_1}{\text{مساحة المزرعة الثانية } م_2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

∴ $\frac{م_1 - م_2}{م_2} = \frac{25 - 9}{9}$ خواص التناسب

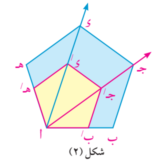
∴ $\frac{32}{م_2} = \frac{16}{9}$

مساحة المزرعة الثانية = ١٨ فدانًا.

ومساحة المزرعة الأولى = ٣٢ + ١٨ = ٥٠ فدانًا.

❑ يهدف مثال ٦ ومثال ٧ صفحتى ٥٦، ٥٧ إلى تنمية قدرات الطالب على البرهان.

٣- فى شكل (٢) إرسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$. ماذا تلاحظ؟ هل تجد تفسيرًا لذلك؟



لاحظ أن

فى المثلثين أ ب' جـ'، أ ب جـ

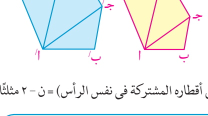
و(∠ أ ب' جـ') = و(∠ب)   من تشابه المضلعين

فيكون $\overline{\text{ب' جـ'}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △ أ ب' جـ' ~ △ أ ب جـ   (نتيجة)

وبالمثل و (∠ أ هـ' ء') = و(∠هـ)

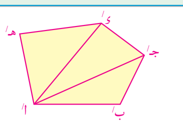
∴ $\overline{\text{هـ' ء'}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$ ويكون △ أ هـ' ء' ~ △ أ هـ ء   وهكذا.

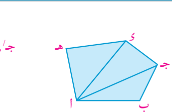


حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

ملاحظة: الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع = ن ضلعًا فإن عدد المثلثات التى يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة فى نفس الرأس) = ن – ٢ مثلثًا.

نظرية ٤ النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.





المعطيات: المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ'

المطلوب: $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{م (المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^2$

البرهان: من أ ، أ' نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ' جـ'}}$ ، $\overline{\text{أ' ء'}}$

∵ المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ'

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره **(حقيقة)**. ويكون:

$\frac{\text{م(△ أ ب جـ)}}{\text{م(△ أ' ب' جـ')}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب' جـ'}}\right)^2$ ، $\frac{\text{م(△ أ جـ ء)}}{\text{م(△ أ' جـ' ء')}} = \left(\frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ' ء'}}\right)^2$ ، $\frac{\text{م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء' هـ'}}\right)^2$

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب' جـ'}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ' ء'}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء' هـ'}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}$ (من تشابه المضلعين)

٥٤   الرياضيات – الصف الأول الثانوى

العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين

∴ $\frac{\text{م(△ أ ب جـ)}}{\text{م(△ أ' ب' جـ')}} = \frac{\text{م(△ أ جـ ء)}}{\text{م(△ أ' جـ' ء')}} = \frac{\text{م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^2$

ومن خواص التناسب

$\frac{\text{م(△ أ ب جـ) + م(△ أ جـ ء) + م(△ أ ء هـ)}}{\text{م(△ أ' ب' جـ') + م(△ أ' جـ' ء') + م(△ أ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^2$

ويكون: $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{م (المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^2$ وهو المطلوب

ملاحظة
$\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^2 = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{أ' ب'})^2}$

حاول أن تحل

٤ **أ** إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أ' ب' جـ' ء'، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{1}{3}$ فاكتب ما يساويه كلٌّ من:

$\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{م (المضلع أ' ب' جـ' ء')}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء'}}$

ب إذا كان المضلعان أ ب جـ ء هـ، أ' ب' جـ' ء' هـ' متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥ فاكتب ما يساويه كل من: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ'}}$

جـ إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥سم² .أوجد مساحة المضلع الثاني.

د إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢سم، ١٦سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥سم². فإوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤ أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: و(∠أ) = ٤٠° ، س ص = $\frac{3}{4}$ أ ب ، جـ ء = ١٦سم.

احسب: **أولًا**: و(∠س)   **ثانيًا**: طول $\overline{\text{ع ل}}$ **ثالثًا**: م(المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل)

الحل

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ و(∠أ) = و(∠س) فيكون و(∠س) = ٤٠°   (المطلوب أولًا)

∵ س ص = $\frac{3}{4}$ أ ب   ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{4}{3}$ (من خواص التناسب)

من تشابه المضلعين نجد أيضًا $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ع ل}}$

∴ $\frac{4}{3} = \frac{16}{\text{ع ل}}$ فيكون ع ل = $\frac{3 \times 16}{4}$ = ١٢سم   (المطلوب ثانيًا)

م(المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)² : (س ص)²

= ١٦ك² : ٩ك²

١٦ : ٩   (المطلوب ثالثًا)

لاحظ أن
أ ب = ٤ك
س ص = ٣ك
ك ≠ ٠

٥٥   كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

مثال

⑤ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤. إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥سم^{٢} فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

∵ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٣ : ٤

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٤

بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩س سم^{٢} ، مساحة المضلع الثاني = ١٦س سم^{٢}

∴ ٩س + ١٦س = ٢٢٥ ويكون س = $\frac{٢٢٥}{٩ + ١٦}$ = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ٩ = ٨١ سم^{٢}

∴ مساحة المضلع الثاني = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم^{٢}

حاول أن تحل

⑤ الربط مع الزراعة: مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٥ ، إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدانًا، فأوجد مساحة كل منهما.



مثال

⑥ أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان. تقاطع قُطرى الأول فى م وتقاطع قُطرى الثاني فى ن.
أثبت أن م(المضلع أ ب جـ ء) : م(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

الحل

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ △ أ ب جـ ~ △ س ص ع (حقيقة)

، △ ء ب جـ ~ △ ل ص ع (لماذا)

∴ △ م ب جـ ~ △ ن ص ع

ويكون $\frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{م جـ}{ن ع}$ (١)

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{م(\text{المضلع أ ب جـ ء})}{م(\text{المضلع س ص ع ل})} = \left(\frac{ب جـ}{ص ع}\right)^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

م(المضلع أ ب جـ ء) : م(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٥٦

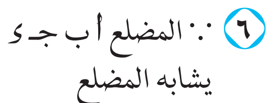
❑ ناقش الطلاب فى خطوات البرهان المنطقى واستخدام أسلوب حل المشكلات والذى يشمل: فهم المشكلة – التخطيط – الحل – التحقق من صحة الحل.

التقويم المستمر

اطلب إلى الطلاب حل ما ورد فى بند حاول أن تحل رقمى ٦، ٧ ص ٥٧ مع متابعة إجاباتهم.

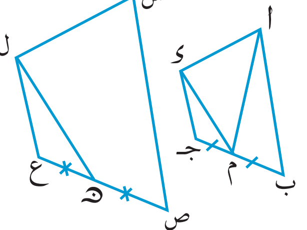


إجابات حاول أن تحل



⑥ ∵ المضلع أ ب جـ ء يشابه المضلع س ص ع ل





∴ △ء م جـ ~ △ل ن ع **حقيقة**

$\frac{م(\text{المضلع أ ب جـ ء})}{م(\text{المضلع س ص ع ل})} = \left(\frac{ء جـ}{ل ع}\right)^{٢}$ **(١)**

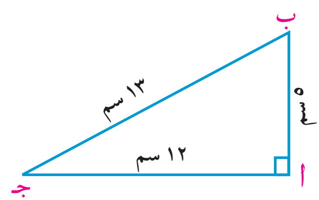
∵ △ء م جـ ~ △ل ن ع

$\frac{ء م}{ل ن} = \frac{م جـ}{ن ع} = \frac{ء جـ}{ل ع}$ **(٢)**

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{م(\text{المضلع أ ب جـ ء})}{م(\text{المضلع س ص ع ل})} = \left(\frac{ء م}{ل ن}\right)^{٢}$ وهو المطلوب

⑦ المضلعات المتشابهة ل، م، ن منشأة على الأضلاع $\overline{أ ب}$، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$،



∴ م(المضلع ل): م(المضلع م): م(المضلع ن)

= (٥)^{٢}: (١٣)^{٢}: (١٢)^{٢}

$\frac{م(\text{المضلع ل})}{م(\text{المضلع م})} = \frac{٢٥}{١٦٩}$ ، $\frac{م(\text{المضلع ل})}{م(\text{المضلع ن})} = \frac{٢٥}{١٤٤}$

م(المضلع ل) = ١٠٠سم٢

م(المضلع م) = $\frac{١٠٠ \times ١٦٩}{٢٥}$ = ٧٢٠سم٢

م(المضلع ن) = $\frac{١٠٠ \times ١٤٤}{٢٥}$ = ٥٧٦سم٢

نشاط إثرائي

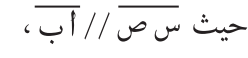
فى الشكل أمامك:



م أ ∩ م ب ∩ م جـ = {م}،

س ∈ $\overline{م أ}$ ، ص ∈ $\overline{م ب}$،

ع ∈ $\overline{م جـ}$



حيث $\overline{س ص}$ // $\overline{أ ب}$ ،

$\overline{س ع}$ // $\overline{أ جـ}$ ، $\frac{م س}{م أ} = \frac{٣}{٥}$

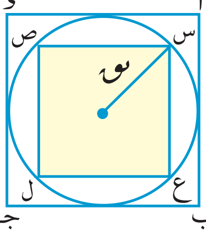
أ بين أزواج المثلثات المتشابهة، واذكر سبب تشابه كل مثلثين.

ب إذا كان أ ب = ٢٥سم، س ع = ٩سم، ع ص = ١٢سم.
ما قياس ∠ س ع ص؟

جـ تحقق من صحة النظرية بحساب مساحة △س ع ص ، △ أ جـ ب، ومقارنة النسبة بين مساحتي سطحيهما.

مثال إضافى للطلاب الفائقين

مربعان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم خارج نفس الدائرة أثبت أن النسبة بين مساحتيهما تساوى $\frac{١}{٢}$



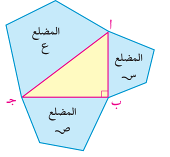
الحل:

بفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق

أ ب = ٢نق، س ص = نق $\sqrt{٢}$

∵ جميع المربعات متشابهة

$$\frac{\text{مـ (المضلع س ص ع ل)}}{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ى)}} = \left(\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}}\right)^{٢} = \frac{٢\,\text{نق}^{٢}}{٤\,\text{نق}^{٢}} = \frac{١}{٢}$$



حاول أن تحل

٦ أ ب جـ ى، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ فأثبت أن:
مـ(المضلع أ ب جـ ى) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م ى)^{٢} : (ن ل)^{٢}

مثال

٧ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ و هى على الترتيب: المضلع س، المضلع ص، المضلع ع.
فأثبت أن مـ(المضلع س) + مـ(المضلع ص) = مـ(المضلع ع)

الحل

∵ المضلع س ~ المضلع ع ∴ $\frac{\text{مـ (المضلع س)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

∵ المضلع ص ~ المضلع ع ∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ص)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع س)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} + \frac{\text{مـ (المضلع ص)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} + \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

$= \frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ (١)

∵ ق(∠ب) = ٩٠° (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{\text{مـ (المضلع س)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} + \frac{\text{مـ (المضلع ص)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = ١$

ويكون مـ(المضلع س) + مـ(المضلع ص) = مـ(المضلع ع)

حاول أن تحل

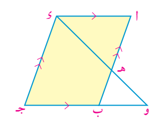
٧ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، فيه أ ب = ٥سم، ب جـ = ١٣ سم، حيث $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة ل، م، ن منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ من الخارج على الترتيب.
فإذا كانت مساحة سطح المضلع ل تساوى ١٠٠سم^{٢} أوجد مساحة سطح كل من المضلعين م، ن.

تحقق من فهمك

فى الشكل المقابل: أ ب جـ ى متوازى أضلاع،
هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٣}{٢}$، $\overleftrightarrow{\text{ى هـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ = {و}

١ أثبت أن △ ى جـ و ~ △ هـ أ ى

٢ أوجد $\frac{\text{مـ (△ ى جـ و)}}{\text{مـ (△ هـ أ ى)}}$

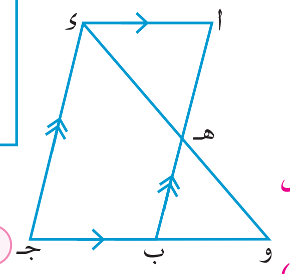




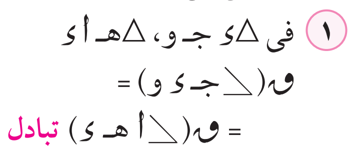
كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

التدريب والتقييم

أولاً: تحقق من فهمك



١ فى △ ى جـ و، △ هـ أ ى



ق(∠جـ ى و) =

= ق(∠ أ هـ ى) تبادل

ق(∠جـ) = ق(∠أ)

(خواص متوازى الأضلاع)

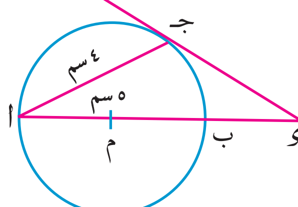
∴ △ ى جـ و ~ △ هـ أ ى

٢ ∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ + هـ ب}} = \frac{٣}{٥} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}}$

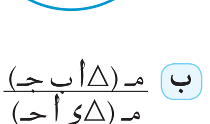
∵ △ ى جـ و ~ △ هـ أ ى ، أ ب = ى جـ

∴ $\frac{\text{مـ (△ ى جـ و)}}{\text{مـ (△ هـ أ ى)}} = \left(\frac{\text{ى جـ}}{\text{أ هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٩}$

٣ فى الشكل المرسوم: $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، ى ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$، ى ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ى جـ}}$ مماس للدائرة عند جـ.
إذا كان أ ب = ٥سم، أ جـ = ٤سم أوجد:



أ $\frac{\text{مـ (△ ى ب جـ)}}{\text{مـ (△ ى أ جـ)}}$ ب $\frac{\text{مـ (△ أ ب جـ)}}{\text{مـ (△ ى أ جـ)}}$



ثانيا: التقييم

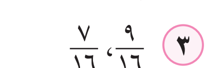
١ مثلثان متشابهان مساحتيهما ١٢٠سم^{٢}، ٢٧٠سم^{٢} أوجد معامل تشابهما.

٢ إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٧: ٥ ومجموع مساحتى سطحيهما ٧٤٠سم^{٢}.فأوجد مساحة سطح كل منهما.

إجابات التقييم



١ $\frac{٢}{٣}$ ٢ ٤٩٠سم^{٢}، ٢٥٠سم^{٢}



٣ $\frac{٩}{١٦}$، $\frac{٧}{١٦}$

ثالثًا: التدريب

اطلب من طلابك حل تمارين مختارة من كراسة الأنشطة والتدريبات صفحة ٢٦، ٢٧ وتابع حلولهم.

٢ - ٤

تطبيقات التشابه فى الدائرة

Applications of Similarity in The Cricle

خلفية

سبق للطالب دراسة علاقات رياضية بين أوتار الدائرة ومستقيمات (أو قطع مستقيمة) مرسومة بشروط معينة، كما درس العلاقات بين زوايا فى الدائرة وأقواسها. وفى هذا الدرس نعمق مفهوم التشابه لدى الطالب بتطبيقات هندسية وحياتية فى إطار دراسته لهندسة الدائرة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويستنتج العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- يتعرف العلاقة بين طول مماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- ينمذج ويحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.

مفردات أساسية

وتر – قاطع – مماس – قطر – مماس خارجى مشترك – مماس داخلى مشترك – دوائر متحدة المركز.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

تعلم تعاونى – اكتشاف موجه – طريقة استنباطية – عرض ومناقشة – حل مشكلات.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٥٨ إلى صفحة ٦٦

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢٨ إلى صفحة ٣١

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

٢ - ٤

تطبيقات التشابه فى الدائرة

Applications of Similarity in the circle

سوف تتعلم

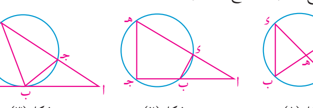
- العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطولى جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles

فكر و ناقش

فى كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.

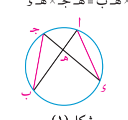
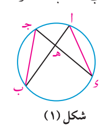


- فى شكل (١): هل توجد علاقة بين هـ ا × هـ ب ، هـ جـ × هـ ء؟
- فى شكل (٢): هل توجد علاقة بين ا هـ × ا ء ، ا جـ × ا ب؟
- فى شكل (٣): هل توجد علاقة بين ا ء × ا جـ ، $(ا ب)^٢$؟

تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{ا ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن:

هـ ا × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

لاستنتاج ذلك:

- ارسم $\overline{ا ء}$ ، $\overline{ب جـ}$
- فى كل من الشكلين أثبت أن المثلثين هـ ا ء ، هـ جـ ب متشابهان فيكون:

$\frac{هـ ا}{هـ جـ} = \frac{هـ ء}{هـ ب}$ ∴ هـ ا × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٥٨



إجراءات الدرس

التمهيد

- راجع مع طلابك مفهوم كل من الزاوية المحيطية، والزاوية المركزية وقياس القوس، واطلب إلى طلابك تحديد متى يكون الشكل الرباعي دائريًّا، والعلاقة بين قياس الزاوية الخارجة لشكل رباعي دائري وقياس الزاوية المقابلة لها.

عرض الدرس

اطلب إلى طلابك تنفيذ ما ورد في بند فكر وناقش في إطار مجموعات عمل (عمل تعاوني) واستقبال إجابات كل مجموعة على حدة من خلال متحدث عن المجموعة، واترك الفرصة للمداخلات والتعليق من باقي المجموعات. وضح للطلاب العلاقة بين أجزاء أي وترين متقاطعين ودعهم يستنتجوا ما جاء بالتمرين المشهور صـ٥٨

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند حاول أن تحل (١)، (٢) من كتاب الطالب ص ٥٩، ص٦٠ مع متابعة حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

(١) في الدائرة المعطاة: ∵ $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}

∴ أهـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ى

(أ) ٣ × ٦ = ٢س ∴ س = ٩

(ب) ٢س × ٣س = ٢٤ ∴ س = ٢

(جـ) (١٥ − س) × س = ٩ × ٤

∴ س^{٢} − ١٥س + ٣٦ = ٠

(س − ٣)(س − ١٢) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ١٢

مثال

(١) في الشكل المقابل: $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}

وإذا كان $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٤}{٣}$، هـ جـ = ٩سم ، هـ ى = ٤سم

أوجد طول $\overline{\text{هـ ب}}$

الحل

∵ $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ أ = ٤ك ، هـ ب = ٣ك حيث ك ≠ ٠

∵ $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ} ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى (تمرين مشهور)

فيكون: ٤ك × ٣ك = ٩ × ٤

١٢ك^{٢} = ٣٦

ك^{٢} = ٣

ك = $\sqrt{٣}$ ، هـ ب = ٣$\sqrt{٣}$ سم

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

مثال

(٢) في الشكل المقابل: $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ى}}$ = {هـ}، أب = ٥سم، جـ ى = ٩سم ، هـ ى = ٣سم. أوجد طول $\overline{\text{ب هـ}}$

الحل

بفرض أن ب هـ = س سم.

∵ $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ى}}$ = {هـ} ∴ هـ ب × هـ أ = هـ ى × هـ جـ (تمرين مشهور)

فيكون: س (س + ٥) = ٣ (٣ + ٩)

س^{٢} + ٥س − ٣٦ = صفر

(س − ٤) (س + ٩) = صفر

∴ س = ٤ ، س = −٩ مرفوض

∴ طول $\overline{\text{ب هـ}}$ = ٤سم.

(٢) (أ) ∵ $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ى}}$ = {هـ}

∴ هـ ب × هـ أ = هـ ى × هـ جـ

٥(٥ + س) = ٤ × ١٢ ∴ س = ٤,٦سم

(ب) ∵ $\overleftarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftarrow{\text{هـ ى}}$ = {أ}

∴ أب × أجـ = أى × أهـ

س × ٣س = ٣ × ٩ ∴ س = ٣

(جـ) ∵ $\overleftarrow{\text{ى هـ}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ب}}$ = {أ}

أب × أجـ = أهـ × أى

س(س + ٥) = ٢ × ٦

س^{٢} + ٥س − ١٢ = صفر

س = $\frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ١ \times -١٢}}{٢}$

= $\frac{-٥ \pm \sqrt{٧٣}}{٢}$

∴ س = $\frac{-٥ + \sqrt{٧٣}}{٢}$ ≃ ١,٧٧ ∈ ح

س = $\frac{-٥ - \sqrt{٧٣}}{٢}$ ∉ ح

تجنب الخطأ

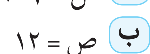
- قد يخطئ الطلاب فى اختيار جزء القاطع عند حل تمارين على تقاطع قاطعين لدائرة فى نقطة خارجها. نبه الطالب إلى أن جزء القاطع المختار فى عملية الضرب هو جزء القاطع الخارج عن الدائرة.
- استنتج مع طلابك العلاقة بين طول المماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها (نتيجة١ ص ٦٠) وناقش معهم مثال ٣

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٣ من كتاب الطالب ص ٦٠ وتابع حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٣ **أ** س = $\sqrt{٦٥}$





ب ص = ١٢

جـ س = ١٢ ، ع = ١٠

ناقش مع طلابك عكس التمرين المشهور صـ٦١ مستخدمًا نظريات التشابه فى استنتاج أن النقط أ، ى، ب، جـ تقع على دائرة واحدة مع توظيف نتيجة ٢ فى حل التمارين.

التقويم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٤، ٥ صفحتى ٦١، ٦٢ كتاب الطالب وتابع حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:



٤ **أ** ∵ $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى}$ = {هـ}،

أ هـ × هـ ب = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

جـ هـ × هـ ى = ١٠ × ١٠ = ١٠٠

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ى

∴ النقط أ، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

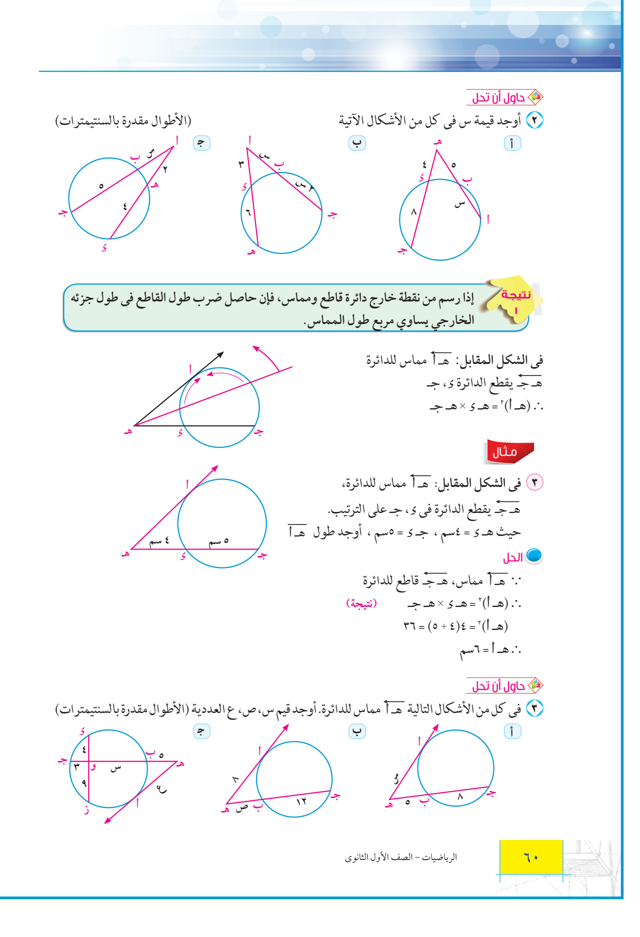
ب ∵ $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى}$ = {هـ}،

هـ ى × هـ جـ = ٤ × ٩

هـ ب × هـ أ = ٣ × ١٢

∴ هـ ى × هـ جـ = هـ ب × هـ أ

∴ النقط أ، ب، جـ، ى على دائرة واحدة.



حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

نتيجة ١
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن حاصل ضرب طول القاطع فى طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول المماس.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة

$\overleftrightarrow{هـ جـ}$ يقطع الدائرة ى، جـ

∴ (هـ أ)^{٢} = هـ ى × هـ جـ

مثال

٣ فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة،

$\overleftrightarrow{هـ جـ}$ يقطع الدائرة فى ى، جـ على الترتيب.

حيث هـ ى = ٤سم ، جـ ى = ٥سم ، أوجد طول $\overline{هـ أ}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس، $\overleftrightarrow{هـ جـ}$ قاطع للدائرة

∴ (هـ أ)^{٢} = هـ ى × هـ جـ (نتيجة)

(هـ أ)^{٢} = ٤(٤ + ٥) = ٣٦

∴ هـ أ = ٦سم

حاول أن تحل

٣ فى كل من الأشكال التالية $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة. أوجد قيم س، ص، ع العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٦٠

تطبيقات التشابه فى الدائرة

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ى}$ فى نقطة هـ (مختلفة عن أ، ب، جـ، ى)
وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى فإن: النقط أ، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

لاحظ أن:

هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

فيكون $\frac{هـ أ}{هـ جـ} = \frac{هـ ى}{هـ ب}$

- هل △ هـ أ ى ~ △ هـ جـ ب؟ لماذا؟
- هل ق (∠ أ) = ق (∠ جـ)؟ لماذا؟
- هل النقط أ، ى، ب، جـ تقع على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.

مثال

٤ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم. ى ∈ $\overline{أب}$ حيث أ ى = ٤سم، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث أ جـ = ٥سم.
أثبت أن الشكل ى ب جـ هـ رباعي دائرى.

الحل

∵ أ ى × أ ب = ٤ × ١٥ = ٦٠،

أ هـ × أ جـ = ٥ × ١٢ = ٦٠

∴ أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

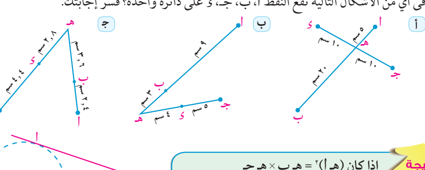
∵ $\overleftrightarrow{ب ى} \cap \overleftrightarrow{جـ هـ}$ = {أ} ، أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

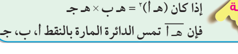
∴ النقط ى، ب جـ، هـ تقع على دائرة واحدة (عكس تمرين مشهور)

ويكون الشكل ى ب جـ هـ رباعيًا دائريًا

حاول أن تحل

٤ فى أيٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ى على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.





نتيجة ٢
إذا كان (هـ أ)^{٢} = هـ ب × هـ جـ
فإن $\overline{هـ أ}$ تمس الدائرة المارة بالنقط أ، ب، جـ

كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول ٦١

ج ∵ $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}،

هـ ب × هـ أ = ٣,٦ × ٦ = ٢١,٦

هـ ى × هـ جـ = ٢,٨ × ٧,٢ = ٢٠,١٦

∴ النقط أ، ب، جـ، ى لا تقع على دائرة واحدة.

٥ أ ∵ أ جـ × أ ى = ٤ × ٩ = ٣٦، (أ ب)^{٢} = ٣٦

∴ النقط ب، جـ، ى تمر بها دائرة واحدة.

ب ∵ أ ى × أ جـ = ٦ × ١٣ = ٧٨،

(أ ب)^{٢} = (٩)^{٢} = ٨١

∴ النقط ب، جـ، ى لا تقع على دائرة واحدة

ج في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

أ جـ = ١٠سم **(فيثاغورث)**

أ ى = ١٠ − ٦,٤ = ٣,٦سم

∵ (أ ب)^{٢} = ٣٦، أ جـ × أ ى = ٣,٦ × ١٠ = ٣٦

∴ (أ ب)^{٢} = أ ى × أ جـ وتكون النقط ب، جـ، ى

تنتمى لدائرة واحدة.

مثال

٥ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٤سم، ى ∈ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$، ى ∉ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث جـ ى = ١٢سم.

أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ى

الحل

∵ أ جـ × أ ى = ٤ (٤ + ١٢) = ٦٤

، (أ ب)^{٢} = (٨)^{٢} = ٦٤

∴ (أ ب)^{٢} = أ جـ × أ ى

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ى عند النقطة ب.

حاول أن تحل

٥ في أيٍّ من الأشكال الآتية يكون $\overline{\text{أ ب}}$ مماسًا للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ى

مثال

٦ تطبيقات حياتية: الربط مع الجيولوجيا: في إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعي. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما في الشكل المقابل. أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.



الحل

بفرض أن طول نصف قطر دائرة القوس = نق مترًا

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ وتران متقاطعان في هـ

∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

٢٧ × ٢٧ = ٩ × (٢نق − ٩)

٢نق − ٩ = ٨١

نق = ٤٥

أي أن طول نصف قطر دائرة القوس يساوي ٤٥ مترًا.

٦٢ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

حل:

∵ $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}،

∴ جـ هـ × هـ ى = أ ب × ب هـ **(١)**

∵ $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ هـ = هـ ب = ٦سم

ويكون هـ ى = ٢نق − ٤

بالتعويض في (١)

∴ ٤ (٢نق − ٤) = ٦ × ٦ نق = ٦,٥

فسر: طول نصف قطر دائرة النفق = ٦,٥ مترًا

تحقق ٦ × ٦ = ٣٦ ، ٤ × (٦,٥ × ٢) = ٣٦

الإجابة صحيحة.

الربط

- يهدف مثال ٦ ص ٦٢، نشاط ص ٦٣ من كتاب الطالب إلى تنمية إدراك الطالب لأهمية موضوع التشابه في حل العديد من المشكلات والمواقف الحياتية .
- ناقش مع طلابك ما ورد من أمثلة باستخدام إستراتيجية حل المشكلات واتباع خطوات حل المشكلة وهي (افهم - خطط - حل - تحقق).

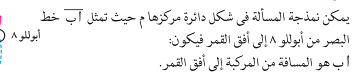
التقويم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند حاول أن تحل ٦ من كتاب الطالب ص ٦٣ وتابع حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٦ نمذج: ضع نموذجًا رياضيًّا للمشكلة، باعتبار أن قوس النفق هو قوس من الدائرة م

نشاط



الربط بالفضاء: مركبة الفضاء أبوللو ٨ هى أول مركبة فضائية حملت إنسانًا إلى مدار القمر.
إذا علمت أن خط البصر من أبوللو ٨ إلى أفق القمر يكون خطًّا مماسيًّا، وحلقت المركبة فى مدار دائرى بمتوسط ارتفاع ١٨٠ كم عن سطح القمر. احسب المسافة من المركبة إلى أفق القمر علمًا بأن طول نصف قطر القمر ١٧٤٠ كم تقريبًا.

خط أفق القمر من خط بصر أبوللو ٨

أبوللو ٨

الحل

يمكن نمذجة المسألة فى شكل دائرة مركزها م حيث تمثل $\overline{\text{أ ب}}$ خط البصر من أبوللو ٨ إلى أفق القمر فيكون:

أ ب هو المسافة من المركبة إلى أفق القمر.

أ جـ = ١٨٠ كم (متوسط ارتفاع المركبة عن سطح القمر)

جـ ى = ٢ × ١٧٤٠ = ٣٤٨٠ كم (طول قطر القمر)

أ ى = ٣٤٨٠ + ١٨٠ = ٣٦٦٠ كم

ويكون: (أ ب)^{٢} = أ جـ × أ ى (المماس وأجزاء القاطع)

= ١٨٠ × ٣٦٦٠ = ٦٥٨٨٠٠

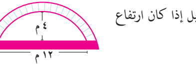
أ ب ≃ ٨١٢ كم

أي أن المسافة من المركبة إلى أفق القمر تساوى ٨١٢ كم تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ **الربط مع هندسة الطرق:** يتم شق الأنفاق الدائرية لتسهيل حركة المركبات وتجنب اختناقات المرور:

ما طول نصف قطر دائرة النفق الموضح بالشكل المقابل إذا كان ارتفاع القوس فوق منتصف النفق يساوي ٤ أمتارًا.



٤ م
١٢ م

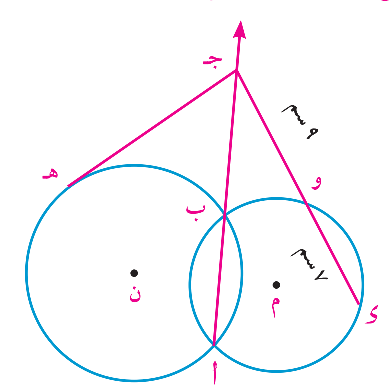
تحقق من فهمك

الربط بالصناعة: يرتكز سلم طوله ٤ أمتار على أرضية أفقية خشنة، وبطرفه الآخر على خزان على هيئة نصف كرة، كما فى الشكل المقابل. إذا كان بعد نهاية السلم السفلى عن قاعدة الخزان ٢ متر، فأوجد طول نصف قطر كرة الخزان.

ب، ٤ أمتار، أ، ٢ متر، جـ، ى



مثال إضافى للطلبة المتفوقين



دائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب. جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$، جـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ هـ}}$ تمس الدائرة ن فى هـ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ يقطع الدائرة م فى و، ى على الترتيب حيث جـ و = ٩سم، و ى = ٧سم

أ) أوجد طول $\overline{\text{جـ هـ}}$

ب) أثبت أن $\overline{\text{جـ هـ}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ى، هـ، و

حل:

أ) ∵ $\overline{\text{جـ أ}}$، $\overline{\text{جـ ى}}$ يقطعان الدائرة م فى ب، أ، و، ى

∴ جـ ب × جـ أ = جـ و × جـ ى

= ٩ (٩ + ٧) = ١٤٤

∵ $\overline{\text{جـ هـ}}$ تمس الدائرة ن فى هـ

∴ (جـ هـ)^{٢} = جـ ب × جـ أ = ١٤٤

ويكون جـ هـ = ١٢سم.

ب) ∵ (جـ هـ)^{٢} = جـ ب × جـ أ ،

جـ ب × جـ أ = جـ و × جـ ى

∴ (جـ هـ)^{٢} = جـ و × جـ ى

∴ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ تمس الدائرة المارة بالنقطة ى، هـ، و

التدريب والتقييم

أولًا: حل تحقق من فهمك

نمذج: باعتبار أن الخط الأفقى المار بقاعدة السلم أ قاطعًا للدائرة التى تمثل مقطعًا رأسيًّا فى الخزان (دائرة عظمى فى الكرة، $\overline{\text{جـ ى}}$ قطر فيها)، السلم أ ب يمثله القطعة المماسة $\overline{\text{أ ب}}$

حل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع للدائرة

∴ أ جـ × أ ى = (أ ب)^{٢}

٢(٢ + ٢نق) = (٤)^{٢} ∴ نق = ٣

فسر: طول نصف قطر كرة الخزان = ٣ أمتار

تحقق: (أ ب)^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦

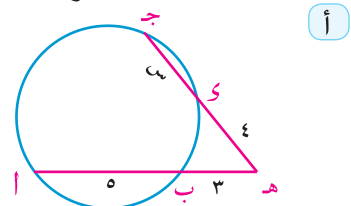
أ ى × جـ ى = ٢(٢ + ٢ × ٣) = ١٦

∴ الإجابة صحيحة

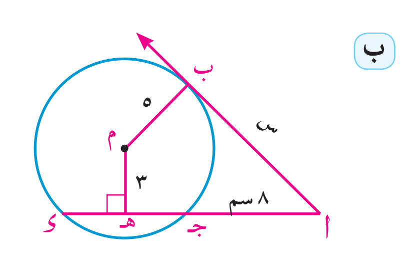
ثانيًا التقييم

١) أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية: (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ)

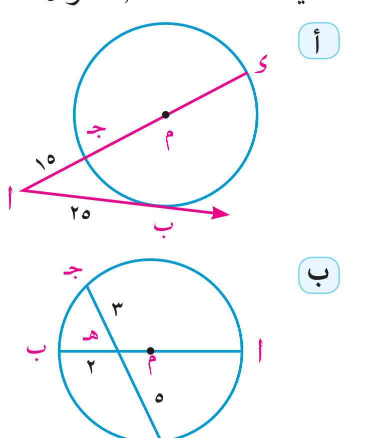


ب



٢ أوجد طول نصف قطر الدائرة م في كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات).

أ ب



٣ دائرة م طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة خارجها بحيث أ م = ١٣سم. $\overleftarrow{\text{أب}}$ يقطع الدائرة في ب، جـ على الترتيب، $\overleftarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة في ء إذا كان ب جـ = ٧سم، أوجد طول كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أء}}$

إجابات التقييم

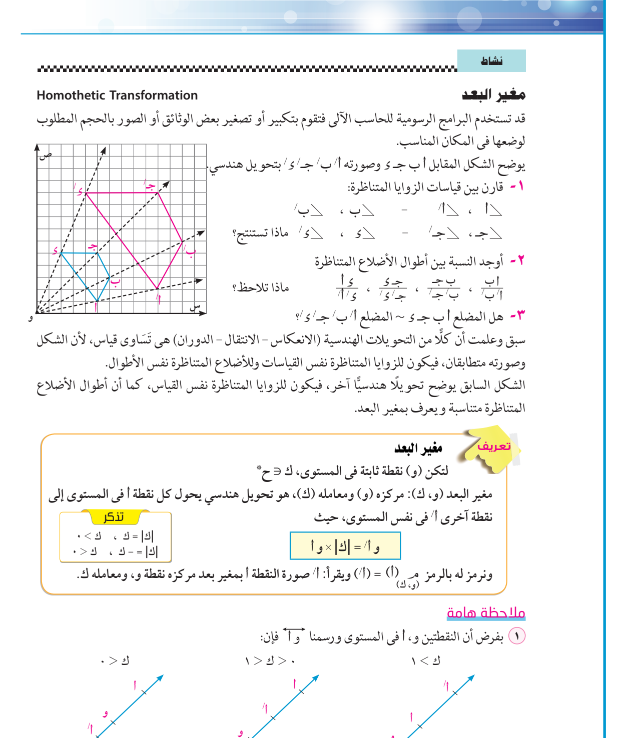
١ أ ٢سم   ب $\sqrt{٨}$ ٢ سم

٢ أ $\frac{٤٠}{٣}$سم   ب ٤,٧٥سم

٣ أ أب = ٩سم ، أء = ١٢سم

ثالثًا: التدريب

اطلب إلى طلابك حل تمارين مختارة من كراسة التدريبات من صفحة ٢٨ إلى صفحة ٣١.



نشاط

مغير البعد Homothetic Transformation

قد تستخدم البرامج الرسومية للحاسب الآلي فتقوم بتكبير أو تصغير بعض الوثائق أو الصور بالحجم المطلوب لوضعها في المكان المناسب.

يوضح الشكل المقابل أ ب جـ ء وصورته أ/ ب/ جـ/ ء/ بتحويل هندسي.

١- قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:
∠أ ، ∠أ/ - ∠ب ، ∠ب/
∠جـ ، ∠جـ/ - ∠ء ، ∠ء/ ماذا تستنتج؟

٢- أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة
$\frac{\text{أب}}{\text{أ/ب/}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/ جـ/}}$ ، $\frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ/ ء/}}$ ، $\frac{\text{ء أ}}{\text{ء/ أ/}}$ ماذا تلاحظ؟

٣- هل المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/؟

سبق وعلمت أن كلًّا من التحويلات الهندسية (الانعكاس - الانتقال - الدوران) هي تَسَاوي قياس، لأن الشكل وصورته متطابقان، فيكون للزوايا المتناظرة نفس القياسات وللأضلاع المتناظرة نفس الأطوال.

الشكل السابق يوضح تحويلًا هندسيًّا آخر، فيكون للزوايا المتناظرة نفس القياس، كما أن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة ويعرف بمغير البعد.

تعريف **مغير البعد**

لتكن (و) نقطة ثابتة في المستوى، ك ∈ ح*

مغير البعد (و، ك): مركزه (و) ومعامله (ك)، هو تحويل هندسي يحول كل نقطة أ في المستوى إلى نقطة أخرى أ/ في نفس المستوى، حيث

و أ/ = |ك| × و أ

تذكر
|ك| = ك ، ك > ٠
|ك| = - ك ، ك < ٠

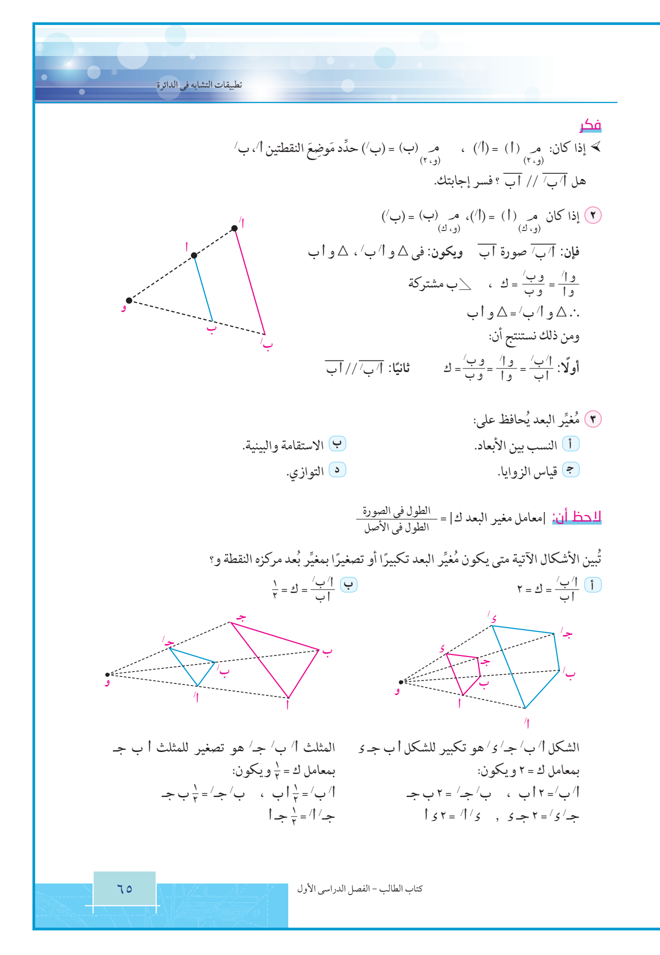
ونرمز له بالرمز م(و، ك) (أ) = (أ/) ويقرأ: أ/ صورة النقطة أ بمغير بعد مركزه نقطة و، ومعامله ك.

ملاحظة هامة

١ بفرض أن النقطتين و، أ في المستوى ورسمنا $\overleftrightarrow{\text{وأ}}$ فإن:

ك > ١: أ/ ∈ $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، أ/ ∉ $\overline{\text{وأ}}$
٠ < ك < ١: أ/ ∈ $\overline{\text{وأ}}$
ك < ٠: أ/ ∈ $\overleftarrow{\text{أو}}$ ، أ/ ∉ $\overline{\text{أو}}$

٦٤ الرياضيات - الصف الأول الثانوى



تطبيقات التشابه في الدائرة

فكر

➤ إذا كان: م(و، ٢) (أ) = (أ/) ، م(و، ٢) (ب) = (ب/) حدِّد مَوضِعَ النقطتين أ/، ب/
هل $\overline{\text{أ/ب/}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ؟ فسر إجابتك.

٢ إذا كان م(و، ك) (أ) = (أ/)، م(و، ك) (ب) = (ب/)

فإن: $\overline{\text{أ/ب/}}$ صورة $\overline{\text{أب}}$ **ويكون:** في △ و أ/ ب/ ، △ و أ ب

$\frac{\text{و أ/}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و ب/}}{\text{و ب}}$ = ك ، ∠ب مشتركة

∴ △ و أ/ ب/ = △ و أ ب

ومن ذلك نستنتج أن:

أولًا: $\frac{\text{أ/ب/}}{\text{أب}} = \frac{\text{و أ/}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و ب/}}{\text{و ب}}$ = ك   **ثانيًا:** $\overline{\text{أ/ب/}}$ // $\overline{\text{أب}}$

٣ مُغيِّر البعد يُحافظ على:
أ النسب بين الأبعاد.   ب الاستقامة والبينية.
جـ قياس الزوايا.   د التوازي.

لاحظ أن: |معامل مغير البعد ك| = $\frac{\text{الطول في الصورة}}{\text{الطول في الأصل}}$

تُبين الأشكال الآتية متى يكون مُغيِّر البعد تكبيرًا أو تصغيرًا بمغيِّر بُعد مركزه النقطة و؟

أ $\frac{\text{أ/ب/}}{\text{أب}}$ = ك = ٢

الشكل أ/ ب/ جـ/ ء/ هو تكبير للشكل أ ب جـ ء بمعامل ك = ٢ ويكون:
أ/ب/ = ٢ أ ب ، ب/ جـ/ = ٢ ب جـ
جـ/ء/ = ٢ جـ ء , ء/أ/ = ٢ ء أ

ب $\frac{\text{أ/ب/}}{\text{أب}}$ = ك = $\frac{١}{٢}$

المثلث أ/ ب/ جـ/ هو تصغير للمثلث أ ب جـ بمعامل ك = $\frac{١}{٢}$ ويكون:
أ/ب/ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، ب/ جـ/ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ
جـ/ أ/ = $\frac{١}{٢}$ جـ أ

٦٥ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول

 نشاط الوحدة

مغير البعد:

اطلب إلى طلابك القيام بالنشاط الموضح من صفحة ٦٤ من كتاب الطالب و يهدف إلى تعرف مغير البعد وخواصه وحتى يكون تكبيرًا أو تصغيرًا.

إجابات النشاط:

(١) (أ) أ، $\frac{١}{٢}$ (ب) ن، $\frac{١}{٢}$

(ج) أ، −٢   (د) و، $-\frac{١}{٢}$

(هـ) أ، −١



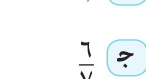

(٢) (أ) ٢ك، ٣ك   (ب) ك^{٢}




(٣) (أ) ٢   (ب) $\frac{١}{٧}$



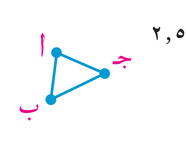

(ج) $\frac{٦}{٧}$



الربط بالتكنولوجيا

بين لطلابك كيف يمكنهم إنشاء مضلع (مثلث) يشابه المضلع (المثلث) الأصلى باستخدام مغير بعد معامله ٢,٥ ومركزه أحد رؤوس المضلع. وذلك باتباع ما يلي:

- استخدم برنامج (Dynamic Geometry) لرسم المضلع (المثلث) ثم اختر من قائمة Edit أمر numberical edit ثم اكتب ٢,٥ فى مكان ما خارج المضلع (المثلث).
- أنشيء تمددًا للمضلع. باختيار أحد رؤوس المضلع كمركز للتكبير، ومغير البعد ٢,٥.



وبذلك تكون قد حصلت على تكبير للمضلع (المثلث) الأصلى.

(ج) فى الشكل المقابل ك = $-\frac{١}{٢}$ < ٠

فيكون أ/ ∈ $\overleftarrow{أو}$، أ/ ∉ $\overline{أو}$،

ب/ ∈ $\overleftarrow{بو}$، ب/ ∉ $\overline{بو}$

جـ/ ∈ $\overleftarrow{جـو}$، جـ/ ∉ $\overline{جـو}$

حيث أ/ ب/ = |$-\frac{١}{٢}$| أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب

ب/ جـ/ = |$-\frac{١}{٢}$| ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

جـ/ أ/ = |$-\frac{١}{٢}$| جـ أ = $\frac{١}{٢}$ جـ أ

اكتشف

(١) من شبكة المثلثات المتطابقة بالشكل المقابل اكتشف مركز ومعامل مُغيِّر البعد الذى يجعل:

(أ) △ أ ب جـ صورة △ أ ى هـ

(ب) △ م ع ل صورة △ أ هـ ى

(ج) △ أ س ص صورة △ أ ب جـ

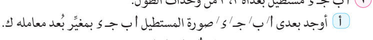
(د) △ م ع ل صورة △ أ ص س

(هـ) △ أ هـ ى صورة △ أ ص س

(٢) أ ب جـ ى مستطيل بعداه ٢، ٣ من وحدات الطول.

(أ) أوجد بعدى أ/ ب/ جـ/ ى/ صورة المستطيل أ ب جـ ى بمغيِّر بُعد معامله ك.

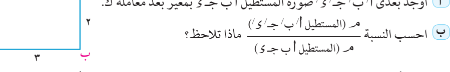
(ب) احسب النسبة $\frac{\text{مـ (المستطيل أ/ ب/ جـ/ ى/)}}{\text{مـ (المستطيل أ ب جـ ى)}}$ ماذا تلاحظ؟



لعلك لاحظت أن: مساحة صورة الشكل بمغير بعد معامله ك = ك^{٢} × مساحة الشكل الأصلى.

فإذا كانت مساحة سطح مضلع ٢٤٥سم^{٢}. فأوجد معامل مغيِّر البعد الذى يَجعل مساحة صورة المضلع:

(أ) ٩٨٠سم^{٢} (ب) ٥سم^{٢} (ج) ١٨٠سم^{٢}



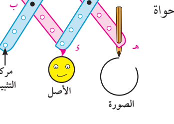
اصنع بنفسك أداة مغير البعد **Pantograph**

الأدوات: ٤ مساطر مدرجة - مثقاب - مسامير محواة - قلم - سن مدبب.

الخطوات: ١- اثقب المساطر عند تدريجها وثبِّت المسامير المحواة والسن المدبب والقلم كما فى الشكل.

٢- اجعل $\frac{أ جـ}{أ ب}$ = ك

٣- حرك الطرف ى على الأصل فيرسم لك الطرف هـ صورته بمغيِّر بُعد معامله ك.



ملخص الوحدة

المضلعان المتشابهان Two Similar Polygons

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

إذا كان المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/ ~ المضلع أ ب جـ ى يكون ك معامل تشابه المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/ للمضلع أ ب جـ ى

حيث $\frac{أ/ ب/}{أ ب} = \frac{ب/ جـ/}{ب جـ} = \frac{جـ/ ى/}{جـ ى} = \frac{أ/ ى/}{أ ى}$ = ك ، ك ≠ ٠

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى معامل تشابههما

المستطيل الذهبى Golden Rectangle

مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه له بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعفى عرضه.

النسبة الذهبية Golden Ratio

النسبة بين طول المستطيل الذهبى إلى عرضه وتساوى تقريبًا ١,٦١٨ : ١

مسلمة: قضية أو عبارة رياضية يسلم بصحتها دون برهان و يستنتج منها حقائق تتعلق بالنظام، مثل: «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرها فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».

نتيجة (١): إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث و يقطع الضلعين الآخرين أو المستقمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

نتيجة (٢): إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

نظرية ١: إذا تناسبت الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.

نظرية ٢: إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين The relation between the area of two similar polygons

نظرية ٣: النسبة بين مساحتى سطحين مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

نظرية ٤: النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

الوحدة الثالثة

نظريات التناسب فى المثلث

The Triangle Proportionality Thearems

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب مفهوم التناسب وخواصه ومغير البعد وخواصه.

وفى هذه الوحدة سوف يستكمل الطالب دراسته لموضوع التناسب، حيث يدرس نظريات التناسب فى المثلث ويستخدمها فى تطبيقات حياتية، وسوف يدرس قوة نقطة بالنسبة لدائرة وقياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة، بالإضافة إلى تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى لزاوية معينة، وذلك من خلال ثلاثة دروس كالآتى:

الدرس الأول: المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس الثانى: منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الدرس الثالث تطبيقات التناسب فى الدائرة.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: "(إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه...) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية فإن..) وحالات خاصة منها.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة لمثلث عند هذا الرأس...) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.) وحالات خاصة منها.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- يوازي Parallel
- نقطة تنصيف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal
- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى على Perpendicular



دروس الوحدة

- الدرس (٣ - ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.
- الدرس (٣ - ٢): منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.
- الدرس (٣ - ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات - خيوط - مقص

نبذه تاريخية

الرياضيات نشاط فكرى ممتع يجعل الذهن متفتحًا، والعقل صحوًا، وتُسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية ، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حرثوا الأراضى الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاما هندسيًّا متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازى وهى:"من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازى مستقيمًا معلومًا". وتُعْني الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات - المضلعات - الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

مخطط تنظيمي للوحدة

نظريات التناسب
التناسب فى المثلث
نظرية تاليس العامة
التناسب فى الدائرة
مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث
المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية مثلث
قياس القوس وطول القوس
طول المماس وجزآى القاطع
القاطع والمماس وقياسات الزوايا
قوة نقطة بالنسبة لدائرة
تطبيقات حياتية وترابطات علمية
قياسات غير مباشرة
علوم وفضاء
بيئة وزراعة
جغرافيا وجيولوجيا
فنون وثقافات عامة

- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

زمن تدريس الوحدة

١٢ ساعة.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الاستدلالى - التفكير المنطقى - التفكير الهندسى - التفكير الناقد - حل المشكلات - التفكير الإبداعى.

الوسائل التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - طباشير ملون (أقلام ملونة) - حاسب آلى - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - أدوات رسم وقياس - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

تعلم تعاونى - تعلم بالاكتشاف الموجه - الطريقة الاستنباطية - العصف الذهنى - المناقشة - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة - تمارين عامة على الوحدة - اختبار الوحدة - اختبار تراكمى فى نهاية الوحدة.

٣ - ١

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

خلفية

سبق أن درس الطالب مفهوم المستمات المتوازية ومفهوم التناسب ومفهوم التشابه، والآن سوف يدرس خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث واستخدام التناسب فى برهنة بعض النظريات.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع المثلث.
- يستخدم التناسب فى حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيات متوازية.
- ينمذج مشكلات حياتية تتضمن المستقيات المتوازية وقواطعها.

مفردات أساسية

توازى – منصف – متوسط – قاطع.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – أدوات هندسية للرسم والقياس – حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستدلالية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٧٠ إلى صفحة ٧٨

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٣٨ إلى صفحة ٤٠

– الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

تمهيد: فكر وناقش

يهدف ما ورد فى بند فكر وناقش إلى أن يستنتج الطالب أنه إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

تابع عمل الطلاب فى البنود ١، ٢، ٣ مؤكدًا على ما تتضمنه

٣ - ١ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيات المتوازية وقواطعها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- يوازى Parallel
- منتصف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

فكر و ناقش

١- ارسم المثلث أ ب جـ، عين نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ.

٢- أوجد بالقياس طول كل من: $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$، $\overline{\text{أ هـ}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$

٣- احسب النسبتين $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

إذا تغير موقع $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{ب جـ}}$.

هل تتغير العلاقة بين $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$؟ ماذا نستنتج؟

نظرية ١ إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب: $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △أ ب جـ ~ △أ ء هـ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ (١)

∵ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ أ ب = أ ء + ء ب ، أ جـ = أ هـ + هـ جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{أ ء} + \text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ} + \text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

ويكون: $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ء}} + \frac{\text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ}} + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

$١ + \frac{\text{ء ب}}{\text{أ ء}} = ١ + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

ومن خواص التناسب نجد أن: $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ (وهو المطلوب)

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٧٠

هذه النظرية.

عرض الدرس

تعلم

- اطلب إلى طلابك استنتاج برهان للنظرية (١) الموضحة فى ص ٧٢ من كتاب الطالب، ثم اطلب إلى متطوع عرض البرهان على السبورة وتصحيح ما يرد من أخطاء وتعزيز الإجابات الصحيحة.
- ناقش مع طلابك مثال (١) ص ٧١ من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم حل ماورد فى بند **حاول أن تحل** مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٧١)

١ أ) $\frac{\text{س} - ٢}{٦} = \frac{٥}{٣}$ س = ١٢

ب) $\frac{\text{س}^٢}{٢٤} = \frac{١٠}{٣٠}$ س^٢ = ٨ ، س = ٢ $\sqrt{٢}$

جـ) $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{١٥}{\text{س}}$ س^٢ + ٤س − ٤٥ = ٠

(س − ٥) (س + ٩) = ٠ س = ٥

أسأل طلابك ماذا يحدث إذا رسم مستقيم خارج المثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاعه و يقطع المستقيمين الحاملين لضلعيه الآخرين فى نقطتين مختلفتين. اطلب إليهم تمثيل ذلك بالرسم وكتابة استنتاجاتهم، وناقش هذه الاستنتاجات مؤكدا على ما هو صحيح منها ومستبعدًا الاستنتاجات الأخرى، ومؤكدًا على منطوق النتيجة الواردة على نظرية (١)، ومستعينًا بما ورد فى ص ٧١ من كتاب الطالب.

ناقش مثال (٢) ص ٧٢ ثم أطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل مع متابعة حلولهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(٢) أ ∵ $\overline{أهـ}$ ∩ $\overline{جـ ى}$ = {ب}، $\overline{أ جـ}$ // $\overline{هـ ى}$

∴ $\frac{أ ب}{ب هـ} = \frac{ب جـ}{ب ى}$

$\frac{٨}{١٢} = \frac{٩}{ب ى}$

ب ى = ١٣,٥ سم

ب ∵ $\overline{أهـ}$ ∩ $\overline{جـ ى}$ = {ب}، $\overline{أ جـ}$ // $\overline{هـ ى}$

∴ $\frac{ب جـ}{جـ ى} = \frac{أ ب}{أ هـ}$

$\frac{ب جـ}{١٨} = \frac{٦}{١٥}$

ب جـ = ٧,٢ سم

أسأل طلابك.. هل عكس النظرية التى درستها صحيح دائمًا؟ ما منطوق عكس النظرية فى هذه الحالة؟ (دع طلابك يكتشفوا ذلك بالرسم والقياس)، ثم أكد على المنطوق الصحيح لعكس النظرية موضحًا ذلك بالبرهان.

وفيمايلى برهان عكس النظرية،

فى الشكل المقابل

∵ $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$

∴ $\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$ خواص التناسب

∵ ∠أ مشتركة فى المثلثين أ ى هـ، أ ب جـ

∴ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ

ويكون ق (∠أ ى هـ) = ق (∠أ ب جـ)

وهما زاويتان فى وضع تناظر بالنسبة للقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$

∴ $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ (وهو المطلوب)

ويمكنك إثبات صحة عكس النظرية فى الحالتين الأخريين

لاحظ أن: ∵ $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ ∴ $\frac{أ ى + ى ب}{ى ب} = \frac{أ هـ + هـ جـ}{هـ جـ}$

أي أن: $\frac{أ ب}{ى ب} = \frac{أ جـ}{هـ جـ}$

مثال

(١) فى الشكل المقابل: $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$، أ س = ١٦سم، ب س = ١٢سم.

أ إذا كان أ ص = ٢٤سم، أوجد ص جـ.

ب إذا كان جـ ص = ٢١سم، أوجد أ جـ.

الحل

أ ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ∴ $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص جـ}$

ويكون: $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص جـ}$ ∴ ص جـ = $\frac{١٢ \times ٢٤}{١٦}$ = ١٨سم.

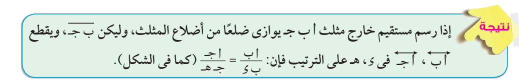
ب ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ∴ $\frac{أ ب}{ب س} = \frac{أ جـ}{جـ ص}$

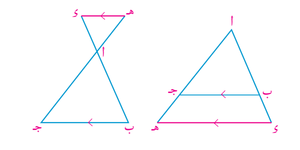
ويكون: $\frac{١٦ + ١٢}{١٢} = \frac{أ جـ}{٢١}$ ∴ أ جـ = $\frac{٢٨ \times ٢١}{١٢}$ = ٤٩سم.

حاول أن تحل

(١) فى كل من الأشكال التالية: $\overline{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ ب جـ


نتيجة: إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث، وليكن $\overline{ب جـ}$، ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ فى ى، هـ على الترتيب فإن: $\frac{أ ب}{ب ى} = \frac{أ جـ}{جـ هـ}$ (كما فى الشكل).



بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$ ، $\frac{أ ى}{ب ى} = \frac{أ هـ}{جـ هـ}$

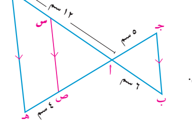
مثال

(٢) فى الشكل المقابل: $\overline{جـ هـ}$ ∩ $\overline{ب ى}$ = {أ}، س ∈ $\overline{أ ى}$

ص ∈ $\overline{أ هـ}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ // $\overline{هـ ى}$.

فإذا كان أ ب = ٦سم، أ جـ = ٥سم، أ ى = ١٢سم، هـ ص = ٤سم.

أوجد طول كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ى س}$.



الحل

∵ $\overline{هـ ى}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ∩ $\overline{ب ى}$ = {أ}

∴ $\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$ ويكون: $\frac{١٢}{٦} = \frac{أ هـ}{٥}$ ∴ أ هـ = ١٠سم

فى △ أ هـ ى:

∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{هـ ى}$ ∴ $\frac{أ هـ}{هـ ص} = \frac{أ ى}{ى س}$

ويكون $\frac{١٠}{٤} = \frac{١٢}{ى س}$ ∴ ى س = ٤,٨سم

حاول أن تحل

(٢) فى الشكل المقابل: $\overline{ى هـ}$ // $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ هـ}$ ∩ $\overline{جـ ى}$ = {ب}

أ إذا كان: أ ب = ٨سم، ب جـ = ٩سم، ب هـ = ١٢سم.

أوجد طول $\overline{ب ى}$.

ب إذا كان: أ ب = ٦سم، ب هـ = ٩سم، جـ ى = ١٨سم.

أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

عكس نظرية ١: إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.

فى الأشكال الثلاثة السابقة: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{ى هـ}$ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ فى ى، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ فى هـ وكان $\frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$

فإن $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

تفكير منطقى: هل △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ؟ ولماذا؟ – هل ∠أ ى هـ ≡ ∠ب ؟ فسر إجابتك.

اكتب برهانًا لعكس النظرية.

ناقش مع طلابك مثال (٣)، مثال (٤) صفحة ٧٣ من كتاب الطالب، ثم أطلب إليهم حل ماورد فى بند **حاول أن تحل** رقمى (٣)، (٤).

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(٣) **أ** $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

∵ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

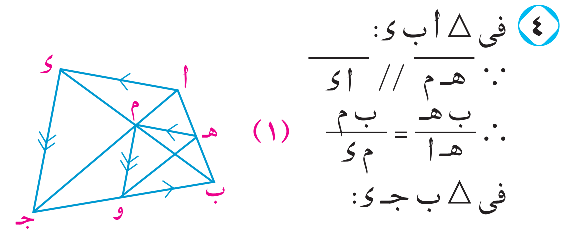
ب $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٢٨}{٢٠} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٤٢}{٢٤} = \frac{٧}{٦}$

∵ $\frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} \neq \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ى هـ}}$ لايوازى $\overline{\text{ب جـ}}$

جـ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٣}{٧}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧}$

∵ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

(٤) فى △ أ ب ى:



∵ $\overline{\text{هـ م}} \parallel \overline{\text{أ ى}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م ى}}$ (١)

فى △ ب جـ ى:

∵ $\overline{\text{م و}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م ى}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}}$

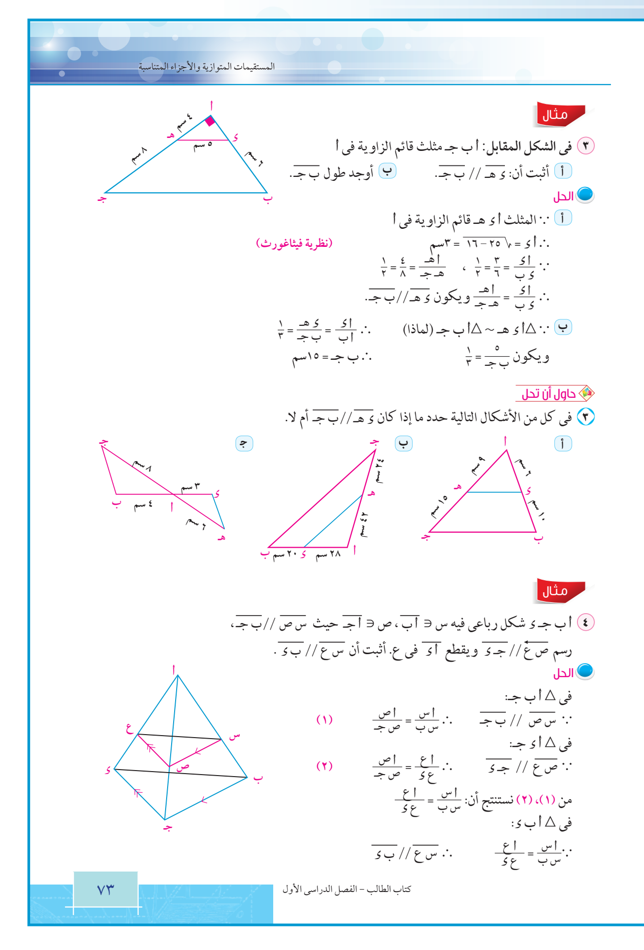
فى △ أ ب جـ:

∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

تفكير منطقى: فى بند تفكير منطقى تناولنا خطوات حل المشكلة (افهم - خطط - حل - تحقق) كما تناولنا مخططًا للبرهان يسمى بالمخطط التسلسلى وهو مخطط جديد على الطلاب، ولكنه يسهم فى تنمية التفكير المنطقى لديهم.

ناقش هذا البند مع طلابك، ثم اترك لهم حل ماورد فى بند **حاول أن تحل** رقم (٥) باستخدام المخطط التسلسلى.



مثال

(٣) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

أ أثبت أن: $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$. ب أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل

أ ∵ المثلث أ ى هـ قائم الزاوية فى أ

∴ أ ى = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣سم (نظرية فيثاغورث)

∵ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ويكون $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$.

ب ∵ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ (لماذا) ∴ $\frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$

ويكون $\frac{٥}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ ب جـ = ١٥سم

حاول أن تحل

(٣) فى كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ أم لا.

مثال

(٤) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$، رسم $\overleftrightarrow{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ى}}$ فى ع. أثبت أن $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{ب ى}}$.

الحل

فى △ أ ب جـ:

∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (١)

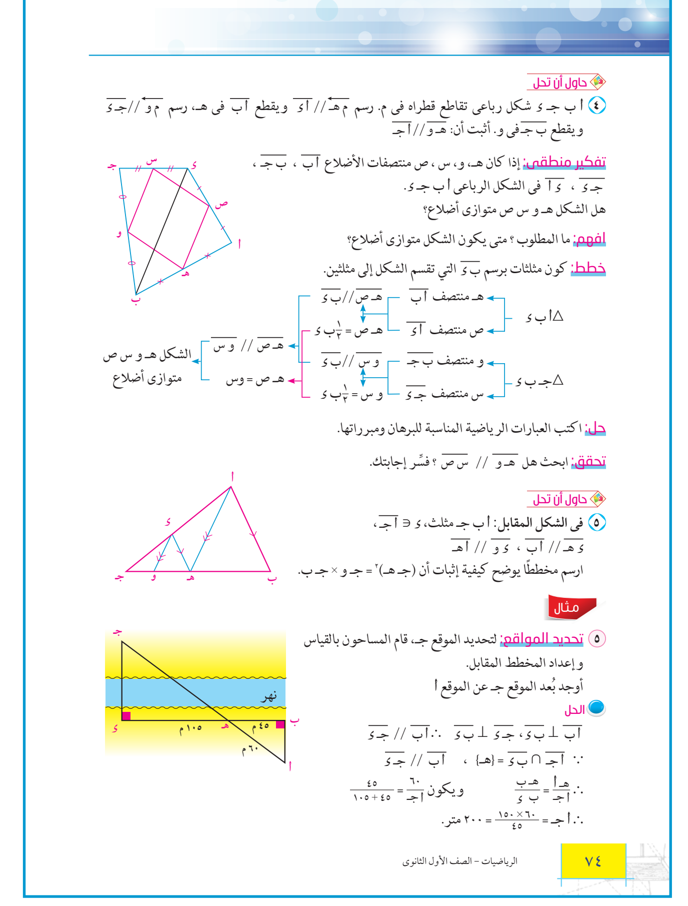
فى △ أ ى جـ:

∵ $\overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$ ∴ $\frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن: $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}}$

فى △ أ ب ى:

∵ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ى}}$ ∴ $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{ب ى}}$



حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى م. رسم $\overleftrightarrow{\text{م هـ}} \parallel \overline{\text{أ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م و}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى و. أثبت أن: $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

تفكير منطقى: إذا كان هـ، و، س، ص منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{ى أ}}$ فى الشكل الرباعى أ ب جـ ى.

هل الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع؟

افهم: ما المطلوب ؟ متى يكون الشكل متوازى أضلاع؟

خطط: كون مثلثات برسم $\overline{\text{ب ى}}$ التي تقسم الشكل إلى مثلثين.

حل: اكتب العبارات الرياضية المناسبة للبرهان ومبرراتها.

تحقق: ابحث هل $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{س ص}}$ ؟ فسِّر إجابتك.

حاول أن تحل

(٥) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$،

$\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ى و}} \parallel \overline{\text{أ هـ}}$

ارسم مخططًا يوضح كيفية إثبات أن $(\text{جـ هـ})^2$ = جـ و × جـ ب.

مثال

(٥) **تحديد المواقع:** لتحديد الموقع جـ، قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع جـ عن الموقع أ

الحل

$\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{جـ ى}} \perp \overline{\text{ب ى}}$ ∴ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ب ى}}$ = {هـ} ، $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ ى}}$

∴ $\frac{\text{هـ أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب ى}}$ ويكون $\frac{٦٠}{\text{أ جـ}} = \frac{٤٥}{٤٥ + ١٠٥}$

∴ أ جـ = $\frac{٦٠ \times ١٥٠}{٤٥}$ = ٢٠٠ متر.

حاول أن تحل

٦ **مكافحة التلوث:** قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطى كما فى الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.

فكر و ناقش

لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازى مستقيم لأحد أضلاع مثلث فى تطبيقات حياتية كثيرة.

يوضح الشكل المقابل بوابة أحد المشاتل الزراعية، وهى مكونه من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها.

هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟

نمذجة

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجًا رياضيًّا للمشكلة) كما يلى:

١- ارسم المستقيمات $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$، م، م/ قاطعان لها فى أ، ب، جـ، ى ، أ/، ب/، جـ/، ى/ على الترتيب كما بالشكل المقابل.

٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

$\frac{\text{أب}}{\text{أ/ب/}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/جـ/}}$ ، $\frac{\text{جـ ى}}{\text{جـ/ى/}}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{أ/جـ/}}$ ، ....

ماذا نستنتج؟

نظرية تاليس العامة Talis' Theorem

نظرية ٢ إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

المعطيات: $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$ ، م، م/ قاطعان لها

المطلوب : أب : ب جـ : جـ ى = أ/ب/ : ب/جـ/ : جـ/ى/

البرهان : ارسم $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ // م/، ويقطع $ل_2$ فى هـ، $ل_3$ فى و،

$\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ // م/، ويقطع $ل_3$ فى س، $ل_4$ فى ص.

$\because$ $\overline{\text{أأ/}}$ // $\overline{\text{هـ ب/}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{أ/ب/}}$

$\therefore$ أهـ ب/أ/ متوازى أضلاع ويكون: أهـ = أ/ب/



التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل (٥)

$\triangle$ أحـهـ $\leftarrow$ $\overline{\text{ى و}}$ // $\overline{\text{أهـ}}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ى جـ}}$

$\triangle$ أب جـ $\leftarrow$ $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{أب}}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ى}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}}$

$\leftarrow$ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}}$ $\downarrow$ $(\text{جـ هـ})^2 = \text{جـ و} \cdot \text{جـ ب}$

الربط بالواقع

مثال رقم (٥) هو تطبيق حياتى يتناول تحديد المواقع، ناقش هذا المثال مع طلابك؛ ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل رقم (٦) ص ٧٥

التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل (٦)

فى $\triangle$ أحـى:

$\because$ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$

$\therefore$ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ ى}}$

$\frac{\text{أب}}{٣٣} = \frac{١٣٠}{٣٩}$

$\therefore$ أب $= \frac{٣٣ \times ١٠}{٣} = ١١٠$ متر

تعلم: نظرية تاليس العامة

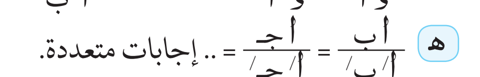
- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند فكر وناقش ص ٧٥ من كتاب الطالب، وهو موقف حياتى يمكن نمذجته باستنتاج نظرية تاليس العامة.
- اطلب إلى طلابك تنفيذ البنود ١، ٢ بند فكر وناقش مع متابعة إجاباتهم وتأكيد مضمون نظرية تاليس.
- ناقش مع طلابك برهان نظرية تاليس العامة والأمثلة الواردة عليها ص ٧٥، ص ٧٦ ثم اطلب إليهم حل ماورد فى بند حاول أن تحل أرقام ٧، ٨، ٩

التقييم المستمر

إجابات «حاول أن تحل» ٧

أ $\frac{\text{أحـ}}{\text{جـ ى}} = \frac{\text{أ/جـ/}}{\text{جـ/ى/}}$ ب $\frac{\text{أحـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أ/جـ/}}{\text{جـ/ب/}}$

جـ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{ب/ى/}}{\text{ى/أ/}}$ د $\frac{\text{أ/ى/}}{\text{أ/ب/}} = \frac{\text{أى}}{\text{أب}}$



هـ $\frac{\text{أب}}{\text{أ/ب/}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أ/جـ/}} =$ .. إجابات متعددة.

حاول أن تحل (٨)

أ $\frac{٣\text{س} + ٢}{٢\text{س} + ٤} = \frac{١٥}{١٢}$ $١٠\text{س} + ٢٠ = ١٢\text{س} + ٨$

$\text{س} = ٦$

$\frac{\text{ص}}{١١} = \frac{٥}{٤}$ $\text{ص} = \frac{٥٥}{٤}$

ب $\frac{\text{س} + ١}{٦} = \frac{٩}{٥}$ $٥\text{س} + ٥ = ٥٤$

$\text{س} = \frac{٤٩}{٥} = ٩{,}٨$

$\frac{\text{ص}}{٥} = \frac{١٠}{٦}$ $\text{ص} = \frac{٢٥}{٣}$

جـ $\frac{٤\text{س} - ١}{٣\text{س} - ٢} = \frac{٣\text{س}}{٢\text{س}}$ $٩\text{س} - ٦ = ٨\text{س} - ٢$

$\text{س} = ٤$

نظرية تاليس الخاصة

اسأل طلابك إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين (لمستقيمات متوازية) ماذا تلاحظ على أطوال أجزاء القاطع الآخر؟

اطلب إليهم كتابة استنتاجهم وناقش هذه الاستنتاجات مؤكدًا على ما هو صحيح منها واستبعاد الاستنتاجات الأخرى، ومؤكدًا على تساوى أجزاء القاطع الآخر عندئذٍ ناقش طلابك فى مثال ٧ صـ٧٧ واطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل ٩

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل (٩)

أ) $\overline{\text{أب}} \,//\, \overline{\text{هـ ى}}$ ، ب هـ = هـ جـ

∴ أى = ى جـ

٢ س + ٣ = ٣ س − ١   س = ٤

٢ ص + ٧ = ٣ × ٤ + ١   ص = ٣

ب) $\overline{\text{اى}} \,//\, \overline{\text{ب هـ}} \,//\, \overline{\text{جـ و}}$

ى هـ = هـ و = وم

∴ س^2 − ٣ = ٣س + ١

س^2 − ٣س − ٤ = ٠

(س − ٤) (س + ١) = ٠

س = ٤ أو س = − ١ مرفوض

٢ ص − ١ = ١٣   ص = ٧

جـ) $\overline{\text{أب}} \,//\, \overline{\text{جـ ى}} \,//\, \overline{\text{هـ و}}$ ، أم = ى و

∴ ب م = جـ هـ

٤ س − ١ = ٢ س + ٧   س = ٤

ب م = ٤ × ٤ − ١ = ١٥

$\frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{١٥}{٣}$ ص = ١٤

التقييم المستمر

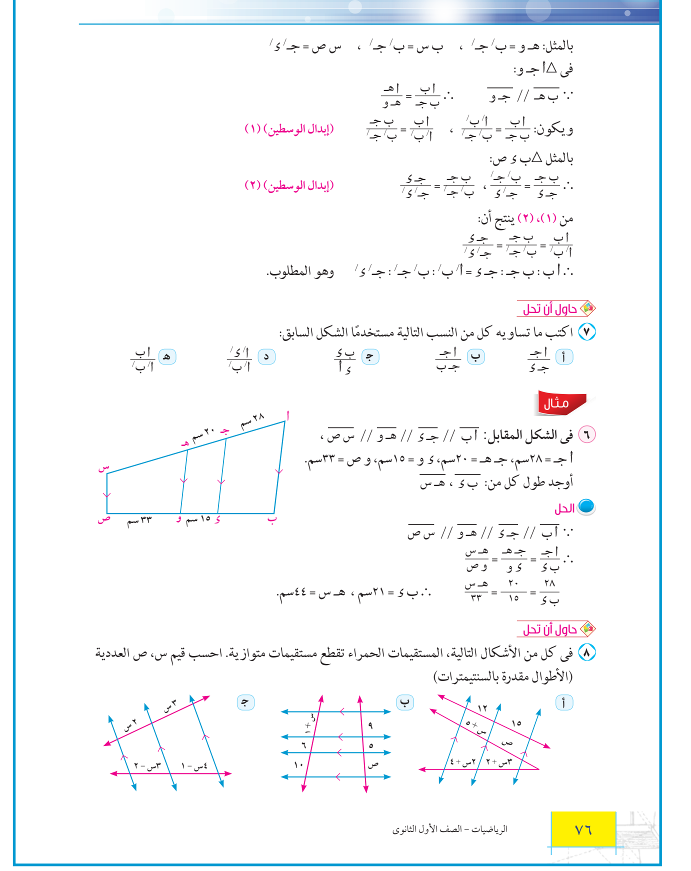
إجابات «فكر» ص ٧٧: نعم، إجابات متنوعة.

□ تابع قياسات طلابك للتحقق من صحة إجابتك.

تجنب الخطأ

قد يطبق بعض الطلاب نظرية تاليس الخاصة بالرغم من عدم تضمن المسألة أن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية.

أكد على طلابك أنه لتطبيق نظرية تاليس الخاصة يجب



بالمثل: هـ و = ب/ جـ/ ، ب س = ب/ جـ/ ، س ص = جـ/ ى/

فى △أ جـ و:

∵ $\overline{\text{ب هـ}} \,//\, \overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\frac{\text{اب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{هـ و}}$

ويكون: $\frac{\text{اب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ/ب/}}{\text{ب/جـ/}}$ ، $\frac{\text{اب}}{\text{أ/ب/}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/جـ/}}$ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل △ب ى ص:

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ ى}} = \frac{\text{ب/جـ/}}{\text{جـ/ى/}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/جـ/}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{جـ/ى/}}$ (إبدال الوسطين) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{اب}}{\text{أ/ب/}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب/جـ/}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{جـ/ى/}}$

∴ أب : ب جـ : جـ ى = أ/ب/ : ب/جـ/ : جـ/ى/ وهو المطلوب.

حاول أن تحل

٧) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل السابق:

أ) $\frac{\text{اجـ}}{\text{جـ ى}}$ ب) $\frac{\text{اجـ}}{\text{جـ ب}}$ جـ) $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى أ}}$ د) $\frac{\text{أ/ى/}}{\text{أ/ب/}}$ هـ) $\frac{\text{اب}}{\text{أ/ب/}}$

مثال

٦) فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أب}} \,//\, \overline{\text{جـ ى}} \,//\, \overline{\text{هـ و}} \,//\, \overline{\text{س ص}}$ ،

أجـ = ٢٨سم، جـ هـ = ٢٠سم، ى و = ١٥سم، و ص = ٣٣سم.

أوجد طول كل من: $\overline{\text{ب ى}}$ ، $\overline{\text{هـ س}}$

الحل

∵ $\overline{\text{أب}} \,//\, \overline{\text{جـ ى}} \,//\, \overline{\text{هـ و}} \,//\, \overline{\text{س ص}}$

∴ $\frac{\text{اجـ}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى و}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{و ص}}$

$\frac{٢٨}{\text{ب ى}} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{\text{هـ س}}{٣٣}$ ∴ ب ى = ٢١سم ، هـ س = ٤٤سم.

حاول أن تحل

٨) فى كل من الأشكال التالية، المستقيمات الحمراء تقطع مستقيمات متوازية. احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

٧٦   الرياضيات - الصف الأول الثانوى

أن يعطى صراحة أن أطوال القطع على أحد القاطعين متساوية (أو استنتاج ذلك)، وبالتالى تكون أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر متساوية. أما إذا لم يعطى ذلك فى المسألة أو لم يتمكن من استنتاجة فيطبق نظرية تاليس العامة.

الربط بالصناعة: مثال رقم ٨ ص ٧٨ هو تطبيق حياتى يربط الموضوع بالصناعة. ناقش هذا المثال مع طلابك ثم اطلب إليهم حل ماورد فى بند "**حاول أن تحل** رقم (١٠)"

التقييم المستمر

إجابات «حاول ان تحل» ١٠

أ) $\overline{\text{أهـ}} \,//\, \overline{\text{ب و}} \,//\, \overline{\text{جـ س}}$، // $\overline{\text{ى ص}}$

(كل منهما عمودية على $\overleftrightarrow{\text{أى}}$)

$\overline{\text{أى}}$ ، $\overline{\text{ص هـ}}$ قاطعان لها.

∴ $\frac{\text{هـ ص}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أى}}{\text{أب}}$ $\frac{\text{هـ ص}}{٢} = \frac{١٢}{٥}$

∴ هـ ص = ٤,٨ مترًا

$\frac{\text{جـ ى}}{\text{أب}} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\text{جـ ى}}{١٨٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ جـ ى = ١٠٨ سم

حالات خاصة

١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ

وكان: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$، فإن: $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أب/}{أجـ/}$



وبالعكس: إذا كان: $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أب/}{أجـ/}$

فإن: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$

نظرية تاليس الخاصة

٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

فى الشكل المقابل $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$، قطعها المستقيمان م، م/

وكان: أ ب = ب جـ = جـ ى فإن: أ/ ب/ = ب/ جـ/ = جـ/ ى/

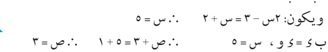
مثال

⑦ **فى الشكل المقابل** أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.

الحل

∵ $\overline{أب} // \overline{جـ ى} // \overline{هـ و}$ ، ب ى = ى و

∴ أ جـ = جـ هـ



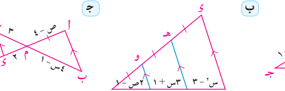
ويكون: ٢س − ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

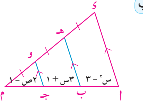
∵ ب ى = ى و ، س = ٥ ∴ ص + ٣ = ٥ + ١ ∴ ص = ٣

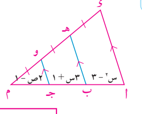
حاول أن تحل

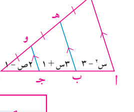
⑨ فى كل مما يأتى أوجد قيمة س، ص العددية. (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ ب جـ









فكر

أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعها على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ، ب.

هل تقسيم يوسف للشريط صحيحًا؟ فسر إجابتك.

استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.

مثال

⑧ **الربط بالصناعة:** تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.

فإذا كانت ى، هـ ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى بنفس الترتيب، أ ب = ١,٢م، ى هـ = ٨٠سم ، هـ و = ١٢مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

الحل

∵ ى، هـ ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى ∴ $\overline{أى} // \overline{ب هـ} // \overline{جـ و}$

∵ $\overline{أى} // \overline{ب هـ} // \overline{جـ و}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ى و}$ قاطعان لها ∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{ى و}{ى هـ}$

ويكون: $\frac{أجـ}{١,٢} = \frac{١٢ + ٠,٨}{٠,٨}$

∴ أ جـ = $\frac{١,٢ \times ١٢,٨}{٠,٨}$ = ١٩,٢ مترًا ∴ أ جـ ≃ ١٩ مترًا

حاول أن تحل

⑩ أ **الربط بالإنشاءات:**

إذا كان أ ب = ١٨٠سم، هـ و = ٢متر

أ ب : ب جـ : جـ ى = ٥ : ٤ : ٣

أوجد طول كل من $\overline{هـ ص}$، $\overline{جـ ى}$

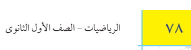
ب **تفكير ناقد**



أوجد من الشكل $\frac{أب}{ب جـ}$ بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

تحقق من فهمك

حل مشكلات: أ ب سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠سم. فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤متر من الأرض.



ب يمكن إيجاد $\frac{أب}{ب جـ}$ بثلاثة طرق

الأولى: البعد بين نقطتين: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{\sqrt{(٥-٢)^٢ + (٥-٣)^٢}}{\sqrt{(١١-٥)^٢ + (٩-٥)^٢}}$

$= \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}} = \frac{١}{٢}$

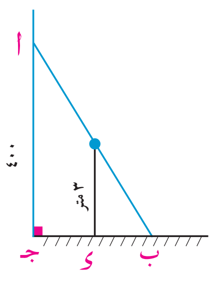
الثانية: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{أى}{ى هـ} = \frac{١}{٢}$

الثالثة: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{هـ و}{جـ و} = \frac{١}{٢}$

إحدى الطرق للإجابة والأخريين للتحقيق.

التدريب والتقييم

أولًا: حل تحقق من فهمك



أ ب = ٤١٠سم ب جـ = ٩٠ سم

من فيثاغورث أ جـ = ٤٠٠سم

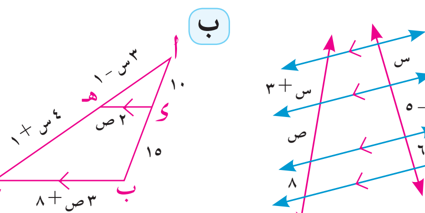
$\frac{ف}{٤١٠} = \frac{٢٤٠}{٤٠٠}$

ف = ٤١ × ٦ ف = ٢,٤٦ متر

التقييم:

① فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ص العددية:

أ ب



② فى الشكل المقابل: $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$،



هـ جـ = ٦سم،

هـ أ = ١٥سم،

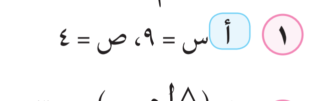
هـ ب = ٢٥سم،

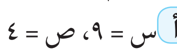
هـ ى = ١٠سم

أثبت أن: $\overline{أب} // \overline{أب}$ ثم أوجد $\frac{م (\triangle أ هـ جـ)}{م (\triangle ب هـ ى)}$

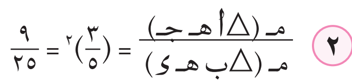
إجابات التقييم

① أ س = ٩، ص = ٤ ب س = ٥، ص = ٤





② $\frac{م (\triangle أ هـ جـ)}{م (\triangle ب هـ ى)} = (\frac{٣}{٥})^٢ = \frac{٩}{٢٥}$



نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين

أ ب جـ ى متوازى أضلاع هـ ∈ ب جـ، هـ ∉ ب جـ رسم اهـ فقطع جـ ى فى و، ورسم جـ س // هـ أ فقطع أ ب فى س

أثبت أن: $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و ى}}$

إجابة النشاط:

∵ س جـ // أ هـ

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{ب جـ}}$ (١)

∵ أ ى // ب جـ

∴ $\frac{\text{جـ و}}{\text{و ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ ى}}$ (٢)

∵ أ ى = ب جـ (خواص متوازى الأضلاع)

∴ $\frac{\text{جـ و}}{\text{و ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ ب}}$ (٣)

من (١)، (٣) ينتج أن

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و ى}}$ وهو المطلوب.

ثالثًا: التدريب:

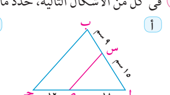
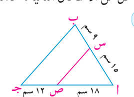
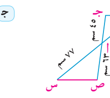
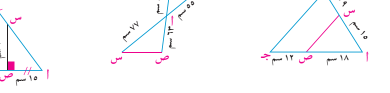
اطلب من طلابك حل تمارين مختارة من كراسة الأنشطة والتدريبات من صفحة ٣٨ إلى صفحة ٤٠ مع متابعة حلولهم.

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

٥ س ص ∩ ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩سم، ص م = ١٥سم، ع ل = ٣٦ سم.
أوجد طول ع م.

٦ لكل مما يأتى: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:
- أ) أ ى = ٤ ، ب ى = ٨ ، جـ هـ = ٦ ، أ هـ = س.
- ب) أ هـ = س ، هـ جـ = ٥، أ ى = س − ٢ ، ى ب = ٣.
- جـ) أ ب = ٢١ ، ب و = ٨ ، و جـ = ٦ ، أ ى = س.
- د) أ ى = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ى ب = ٣و جـ = ١٢.

٧ فى كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ

٨ س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤سم، س ع = ٢١سم، ل ∈ س ص بحيث س ل = ٥,٦سم، م ∈ س ع حيث س م = ٨,٤سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩ فى المثلث أ ب جـ، ى ∈ أ ب، هـ ∈ أ جـ، ٥أ هـ = ٤ هـ جـ.
إذا كان أ ى = ١٠ سم، ى ب = ٨سم. حدد ما إذا كان ى هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠ أ ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ. فإذا كان أ هـ = ٦سم، ب هـ = ١٣سم، هـ و = ١٠سم، هـ ى = ٧,٨سم. أثبت أن الشكل أ ب جـ ى شبه منحرف.

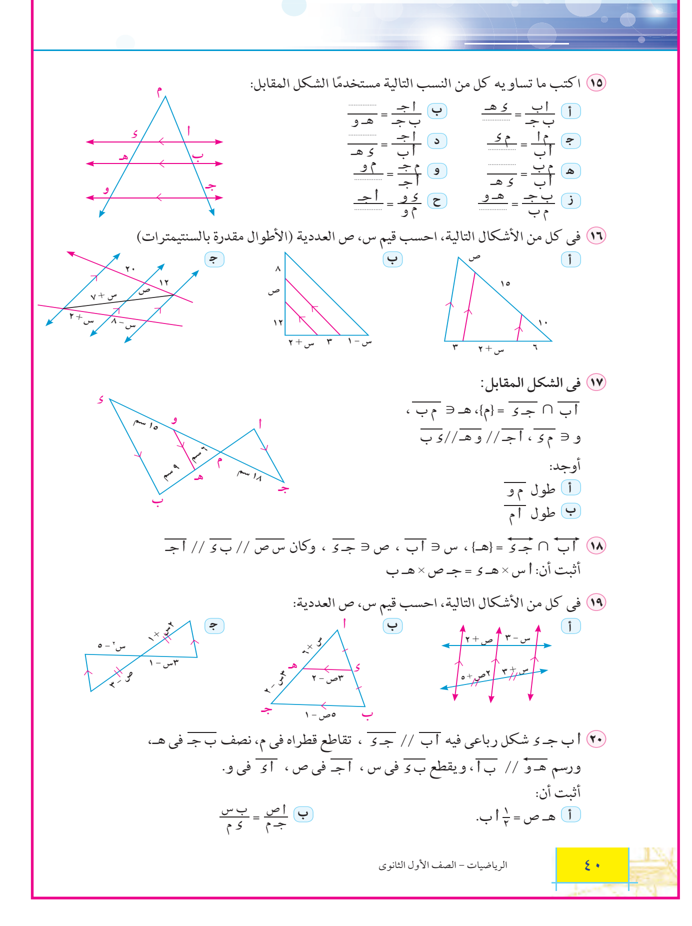
١١ أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى ضلعه الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

١٢ أ ب جـ مثلث، ى ∈ أ ب حيث ٣أ ى = ٢ ى ب، هـ ∈ أ جـ حيث ٥ جـ هـ = ٣ أ جـ، رسم أ س يقطع ب جـ فى س. إذا كان أ و = ٨سم، أ س = ٢٠سم، حيث و ∈ أ س. أثبت أن النقط ى، و، هـ على استقامة واحدة.

١٣ أ ب جـ مثلث، ى ∈ ب جـ، بحيث $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{٣}{٤}$، هـ ∈ أ ى، بحيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ى}} = \frac{٣}{٧}$، رسم جـ هـ فقطع أ ب فى س، رسم ى ص // جـ س فقطع أ ب فى ص. أثبت أن أ س = ب ص.

١٤ أ ب جـ ى مستطيل تقاطع قطراه فى م. هـ منتصف أ م، و منتصف م جـ. رسم ى هـ يقطع أ ب فى س، ورسم ى و يقطع ب جـ فى ص. أثبت أن: س ص // أ جـ.

٣٩ كتاب الأنشطه والتدريبات – الفصل الدراسى الأول



١٥ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل:
- أ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{.....}}$
- ب) $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{.....}}{\text{هـ و}}$
- جـ) $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م ى}}{\text{.....}}$
- د) $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{.....}}{\text{ى هـ}}$
- هـ) $\frac{\text{م ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{.....}}{\text{ى هـ}}$
- و) $\frac{\text{م جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{م و}}{\text{.....}}$
- ز) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{.....}}$
- ح) $\frac{\text{ى و}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{.....}}$

١٦ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

١٧ فى الشكل المقابل:
أ ب ∩ جـ ى = {م}، هـ ∈ م ب ، و ∈ م ى ، أ جـ // و هـ // ى ب
أوجد:
- أ) طول م و
- ب) طول أ م

١٨ أ ب ∩ جـ ى = {هـ} ، س ∈ أ ب ، ص ∈ جـ ى ، وكان س ص // ب ى // أ جـ
أثبت أن: أ س × هـ ى = جـ ص × هـ ب

١٩ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:

٢٠ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب // جـ ى ، تقاطع قطراه فى م، نصف ب جـ فى هـ، ورسم هـ و // ب أ، ويقطع ب ى فى س ، أ جـ فى ص ، أ ى فى و.
أثبت أن:
- أ) هـ ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب.
- ب) $\frac{\text{أ ص}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ى م}}$

٤٠ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

٣ - ٢

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

Angle Biesectors and Proportional Parts

٣ - ٢ منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة
Angle Bisectors and Proportional Parts

عمل تعاونى

١- ارسم المثلث أ ب جـ، وإرسم $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ليقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.

٢- قس كلًا من $\overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{جـ ى}}$، $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$.

٣- احسب كل من النسبتين $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$، $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ وقارن بينهما.
ماذا تستنتج؟

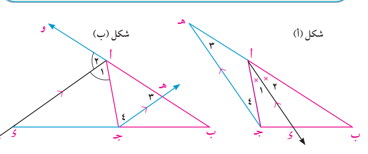
٤- كرر العمل السابق عدة مرات.
هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

سوف تتعلم
- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية فى مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.

منصف زاوية مثلث Bisector of an Angle of a Triangle

نظرية ٣
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزآين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى Perpendicular



الأدوات والوسائل
- أدوات هندسية للرسم.
- حاسب آلى وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ
(من الداخل فى شكل أ ، من الخارج فى شكل ب).

المطلوب : $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

البرهان : ارسم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ويقطع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ فى هـ. اتبع المخطط التالى واكتب البرهان.

٧٩ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

خلفية

درس الطالب خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث واستخدام التناسب فى برهنة بعض النظريات وحساب أطوال الأجزاء المتناسبة، والآن سوف يدرس خصائص منصفات زوايا المثلث وكيفية استخدام التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة من تنصيف زاوية فى مثلث.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يحدد خصائص منصفات زوايا المثلث.
- يستخدم التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة من تنصيف زاوية فى مثلث.
- يوجد طول كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث وأطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية فى مثلث.

مفردات أساسية

منصف – منصف داخلى – منصف خارجى – متعامد.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) أدوات هندسية للرسم والقياس – حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستدلالية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

– كتاب الطالب من صفحة ٧٩ إلى صفحة ٨٥ .
– كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٣٩، صفحة ٤٠ .
– الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

اطلب إلى طلابك تنفيذ ما ورد فى بند عمل تعاونى والذى يهدف إلى أن يستنتج الطالب أنه إذا رسم منصف زاوية رأس مثلث قسم المنصف قاعدة المثلث إلى جزأين النسبة بينهما تساوى النسبة بين طول الضلعين الآخرين.

تابع عمل الطلاب فى البنود الأربعة مؤكدًا على ما تتضمنه نظرية ٣.

عرض الدرس

- اطلب إلى طلابك استنتاج برهان للنظرية (٣) الموضحة فى صفحة ٨١ من كتاب الطالب، ثم اطلب إلى متطوع عرض البرهان على السبورة وتصحيح ما يرد من أخطاء وتعزيز الإجابات الصحيحة.
- ناقش مع طلابك مثال (١)، مثال (٢) من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل (١)، (٢) مع متابعة إجاباتهم وتصحيح ما يرد بها من أخطاء.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(١) (أ) فى △ أ ب جـ ∵ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{س + ١}{٥} = \frac{١٥}{٩}$ ويكون س = ٩

(ب) فى △ أ ب جـ ∵ $\overleftarrow{ب ء}$ ينصف ∠ ب

∴ $\frac{جـ ء}{أ ء} = \frac{ب جـ}{أ ب}$

∴ $\frac{س + ١}{٥} = \frac{س + ٤}{٨}$ ويكون س = ٤

(جـ) فى △ أ ب جـ ∵ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{س + ٤}{س} = \frac{٧}{٥}$ ويكون س = ١٠

(٢) ∵ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ

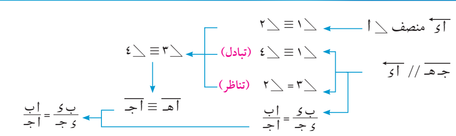
∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب ء}{ء جـ}$

ويكون $\frac{٣}{٥} = \frac{٢٤}{ء جـ}$

∴ ء جـ = ٤٠ سم،

ب جـ = ٦٤ سم

∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{٣}{٥}$



مثال

(١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٦سم، ب جـ = ٧سم، رسم $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء. أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$، $\overline{ء جـ}$

الحل

∵ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ (نظرية)

∵ أ ب = ٨سم، أ جـ = ٦سم ∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

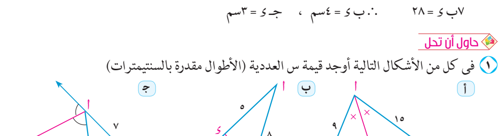
∵ ب جـ = ب ء + ء جـ = ٧سم ∴ $\frac{ب ء}{٧ - ب ء} = \frac{٤}{٣}$

٣ب ء = ٢٨ − ٤ ب ء (ضرب تبادلى)

٧ب ء = ٢٨ ∴ ب ء = ٤سم ، جـ ء = ٣سم

حاول أن تحل

(١) فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



مثال

(٢) أ ب جـ مثلث. رسم $\overleftarrow{ب ء}$ ينصف ∠ ب، ويقطع $\overline{أ جـ}$ فى ء، حيث أ ء = ١٤سم، ء جـ = ١٨سم. إذا كان محيط △ أ ب جـ = ٨٠سم، فأوجد طول كل من: $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$.

الحل

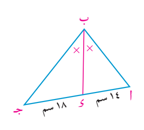
فى △ أ ب جـ

∵ $\overleftarrow{ب ء}$ ينصف ∠ ب ∴ $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{أ ء}{ء جـ}$

∴ $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{١٤}{١٨} = \frac{٧}{٩}$

∵ محيط △ أ ب جـ = ٨٠سم، أ جـ = ١٤ + ١٨ = ٣٢سم

∴ أ ب + ب جـ = ٨٠ − ٣٢ = ٤٨سم



∴ أ ب = ٣م، أ جـ = ٥م حيث م ≠ ٠

∴ ب جـ = ٤م (فيثاغورث)

ويكون م = $\frac{٦٤}{٤}$ = ١٦

∴ محيط △ أ ب جـ = ٣ م + ٤م + ٥م = ١٢ م

= ١٢ × ١٦ = ١٩٢سم

- اطلب إلى طلابك تبريرًا لما ورد فى بند ملاحظة هامة وناقش معهم ما ورد فى بند تفكير ناقد ويهدف إلى تعميق فهمهم لما ورد فى هذه الملاحظات

التقييم المستمر

إجابات تفكير ناقد:

- كلما كبر أ جـ فإن النقطة ء تقترب من النقطة ب.
- عندما أ هـ = أ جـ فإن النقطة ء تنصف $\overline{ب جـ}$ ويكون $\overline{أ هـ} // \overline{ب جـ}$.
- عندما أ جـ > أ ب يكون ء جـ > ء ب، هـ ∉ $\overleftrightarrow{ب جـ}$
- ناقش مع طلابك مثال (٣)، صفحة ٨١ ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل (٣)، صفحة ٨٢ من كتاب الطالب وتابع حلولهم.

تجنب الخطأ

قد يخلط الطالب بين كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.

أكد على طلابك موضحًا بالأمثلة أن المنصف الداخلى لزاوية رأس المثلث يقطع الضلع المقابل لها فى نقطة، أما المنصف الخارجى لهذه الزاوية فإنه يقطع امتداد هذا الضلع (وليس الضلع نفسه) فى نقطة.

التقييم المستمر

إجابات «حاول أن تحل»:

٣ **أ** ∵ $\overrightarrow{\text{أى}}$ ينصف ∠ أ،

$\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ ى، هـ تقسمان $\overline{\text{جـ ب}}$ من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة

أى أن: $\frac{\text{جـ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{١}$

∵ جـ هـ : هـ ب = ٢ : ١

∴ جـ ب = هـ ب

ويكون $\overline{\text{أب}}$ متوسط للمثلث أ جـ هـ.

ب ∵ $\frac{\text{جـ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٢}{١}$ ، جـ ب = جـ ى + ى ب = ٧

∴ $\frac{\text{جـ ى} + \text{ى ب}}{\text{ى ب}} = \frac{٢ + ١}{١}$ ← $\frac{٧}{\text{ى ب}} = \frac{٣}{١}$ ← ى ب = $\frac{٧}{٣}$

ويكون طول هـ ى = ب هـ + ب ى = ٧ + $\frac{٧}{٣}$ = $\frac{٢٨}{٣}$

، طول $\overline{\text{جـ هـ}}$ = ١٤ سم

∵ $\overline{\text{ى هـ}} \subset \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$، المثلثين أ ى هـ، أ جـ هـ لهما نفس الارتفاع.

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ى هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ جـ هـ})} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{جـ هـ}}$

= $\frac{٢٨}{٣} \div ١٤ = \frac{٢}{٣}$

إيجاد طول المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.

- ناقش مع طلابك التمرين المشهور صـ٨٢ من كتاب الطالب موضحًا كيفية إيجاد طول المنصف الداخلى لزاوية رأس المثلث مستعينًا بالمثال ٤ فى نفس الصفحة.

∵ $\frac{\text{اب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧}{٩}$ ∴ $\frac{\text{اب} + \text{ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧ + ٩}{٩}$ (خواص التناسب)

ويكون $\frac{٤٨}{\text{ب جـ}} = \frac{١٦}{٩}$ ∴ ب جـ = ٢٧سم ، اب = ٢١سم

حاول أن تحل

٢ اب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب. رسم $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ا، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.
إذا كان طول $\overline{\text{ب ى}}$ = ٢٤سم، ب ا : ا جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ اب جـ.

ملاحظة هامّة

١- فى المثلث اب جـ حيث اب ≠ ا جـ:

إذا كان $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ب ا جـ،

$\overleftarrow{\text{اهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند ا.

فإن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

و يكون $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

أى أن $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل فى ى ومن الخارج فى هـ بنسبة واحدة

ويكون المنصفين $\overrightarrow{\text{اى}}$ ، $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ متعامدين . (لماذا)؟

٢- إذا كان اب > ا جـ، قطع منصف ∠ا الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى حيث ب ى > ى جـ، أما منصف الزاوية الخارجة عند ا فيقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ حيث ب هـ > هـ جـ.

تفكير ناقد

- كلما كبر ا جـ ماذا يحدث للنقطة ى؟
- إذا كان ا جـ = ا ب أين تقع النقطة ى؟ وما وضع $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ بالنسبة إلى $\overline{\text{ب جـ}}$ عندئذٍ؟
- عندما يصبح ا جـ > ا ب ما العلاقة بين ى جـ، ى ب؟ وأين تقع هـ عندئذٍ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

٣ اب جـ مثلث فيه اب = ٦سم، ا جـ = ٤سم ، ب جـ = ٥سم. رسم $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ا ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى، ورسم $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ا الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. احسب طول $\overline{\text{ى هـ}}$.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ا، $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ا الخارجة

∴ ى، هـ تقسمان $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

أي أن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∵ ب جـ = ب ى + ى جـ = ٥ ، ب هـ − هـ جـ = ب جـ = ٥

من خواص التناسب نجد

$\frac{\text{ب ى} + \text{ى جـ}}{\text{ى جـ}} = \frac{٣ + ٢}{٢}$ $\frac{٥}{\text{ى جـ}} = \frac{٥}{٢}$ ∴ ى جـ = ٢

$\frac{\text{ب هـ} - \text{هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٣ - ٢}{٢}$ $\frac{٥}{\text{هـ جـ}} = \frac{١}{٢}$ ∴ هـ جـ = ١٠

ويكون ى هـ = ى جـ + جـ هـ ى هـ = ٢ + ١٠ = ١٢سم

حاول أن تحل

٣ اب جـ مثلث فيه اب = ٣سم، ب جـ = ٧سم، جـ ا = ٦سم. رسم $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ ا، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى، ورسم $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ ا الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ فى هـ.

أ أثبت أن $\overline{\text{اب}}$ متوسط فى المثلث ا جـ هـ.

ب أوجد النسبة بين مساحة المثلث ا ى هـ، و مساحة المثلث ا جـ هـ.

إيجاد طول المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.

تمرين مشهور

إذا كان $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ ا في △ اب جـ من الداخل ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى
فإن: ا ى = $\sqrt{\text{اب} \times \text{ا جـ} - \text{ب ى} \times \text{ى جـ}}$

المعطيات: اب جـ مثلث، $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ب ا جـ من الداخل، $\overrightarrow{\text{اى}} \cap \overline{\text{ب جـ}}$ = {ى}

المطلوب: $(\text{اى})^٢$ = اب × ا جـ − ب ى × ى جـ

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث اب جـ

وتقطع $\overrightarrow{\text{اى}}$ في هـ، ارسم $\overline{\text{ب هـ}}$

فيكون: △ا جـ ى ~ △ا هـ ب (لماذا)؟، $\frac{\text{اى}}{\text{اب}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{اهـ}}$

∴ ا ى × اهـ = اب × ا جـ

ا ى × (ا ى + ى هـ) = اب × ا جـ

$(\text{اى})^٢$ = اب × ا جـ − ا ى × ى هـ

$(\text{اى})^٢$ = اب × ا جـ − ب ى × ى جـ

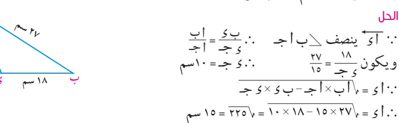
أي أن: ا ى = $\sqrt{\text{اب} \times \text{ا جـ} - \text{ب ى} \times \text{ى جـ}}$

تذكر
ا ى × ى هـ = ب ى × ى جـ

مثال

٤ اب جـ مثلث فيه اب = ٢٧سم، ا جـ = ١٥سم. رسم $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ا ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.
إذا كان ب ى = ١٨سم احسب طول $\overline{\text{اى}}$.

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ب ا جـ ∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{اب}}{\text{ا جـ}}$

ويكون $\frac{١٨}{\text{ى جـ}} = \frac{٢٧}{١٥}$ ∴ ى جـ = ١٠سم

∵ ا ى = $\sqrt{\text{اب} \times \text{ا جـ} - \text{ب ى} \times \text{ى جـ}}$

∴ ا ى = $\sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠} = \sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم



❑ اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند حاول أن تحل رقم ٤ مع متابعة إجاباتهم.

التقويم المستمر

إجابات حاول أن تحل

④ (أ) س = $\frac{١٦}{٣}$ سم ، ا ى = $٢\sqrt{\frac{٧}{٣}}$ سم

(ب) س = $\frac{١٥}{٢}$ سم ، ا ى = $٣\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ سم

(ج) س = $\frac{٥٤}{٧}$ سم ، ا ى = $٢\sqrt{\frac{٣}{٧}}$ سم

❑ وضح لطلابك أنه لإيجاد طول المنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث تستخدم ما ورد فى بند لاحظ أن صـ ٨٣، ويمكنك تقديم البرهان التالى لأثبات صحة هذه العلاقة:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ منصف داخلى، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ منصف خارجي لزاوية ا فى △ ا ب جـ.

المطلوب: $(\text{ا هـ})^٢$ = ب هـ × هـ جـ - ا ب × ا جـ

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ منصف داخلى، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ منصف خارجي لزاوية ا فى △ ا ب جـ.

∴ $\overleftrightarrow{\text{ا ى}} \perp \overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ، $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

ويكون ب ى × هـ جـ = ب هـ × ى جـ (١)

فى △ ا ى هـ القائم الزاوية فى ا

$(\text{ا هـ})^٢ = (\text{ى هـ})^٢ - (\text{ا ى})^٢$

= (ب هـ - ب ى) (هـ جـ + ى جـ) - $(\text{ا ى})^٢$

= ب هـ × هـ جـ + ب هـ × ى جـ - ب ى × هـ جـ

- ب ى × ى جـ - $(\text{ا ى})^٢$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$(\text{ا هـ})^٢$ = ب هـ × هـ جـ - ب ى × ى جـ - $(\text{ا ى})^٢$

$(\text{ا ى})^٢$ = ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ **(تمرين مشهور)**

$(\text{ا هـ})^٢$ = ب هـ × هـ جـ - ا ب × ا جـ وهو المطلوب

❑ أطلب إلى طلابك حل ماورد فى بند حاول أن تحل رقم (٥) مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

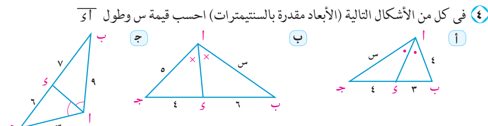
⑤ (أ) س = ٧سم ، ا هـ = $٢\sqrt{٢١}$ سم

(ب) س =٨ سم ، ا هـ = $٣\sqrt{١٠}$ سم

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

حاول أن تحل

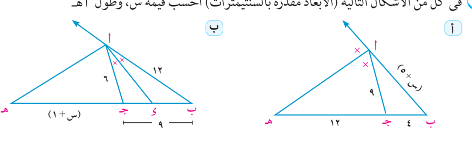
④ فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{\text{ا ى}}$



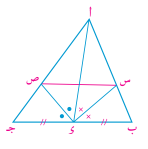
لاحظ أن: فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ينصف ∠ ب ا جـ من الخارج ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. فإن: ا هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{ا ب} \times \text{ا جـ}}$

حاول أن تحل

⑤ فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س، وطول $\overline{\text{ا هـ}}$



مثال



⑤ فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ا ى}}$ متوسط فى △ ا ب جـ

$\overleftrightarrow{\text{ى س}}$ ينصف ∠ ا ى ب. ويقطع $\overline{\text{ا ب}}$ فى س.

$\overleftrightarrow{\text{ى ص}}$ ينصف ∠ ا ى جـ ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى ص.

أثبت أن: $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$.

الحل

فى △ ا ى ب: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ى س}}$ ينصف ∠ ا ى ب ∴ $\frac{\text{ا ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ا س}}{\text{س ب}}$ (١)

فى △ ا ى جـ: ∵ $\overleftrightarrow{\text{ى ص}}$ ينصف ∠ ا ى جـ ∴ $\frac{\text{ا ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ا ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

فى △ ا ب جـ: ∵ $\overline{\text{ا ى}}$ متوسط ∴ ى ب = ى جـ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) $\frac{\text{ا س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ا ص}}{\text{ص جـ}}$ ويكون $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$.

٨٣ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول

❑ ناقش مع الطلاب مثال (٥) صـ٨٣ و إطلب إليهم حل بند حاول أن تحل (٦) صـ ٨٤ من كتاب الطالب وتابع حلولهم.

التقويم المستمر

إجابات حاول أن تحل

⑥ (أ) فى △ ا ب جـ: $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ جـ

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ا جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

فى △ ا ب جـ $\frac{\text{جـ و}}{\text{ا و}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∵ $\frac{\text{جـ و}}{\text{ا و}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ا هـ}} = \frac{١}{٢}$

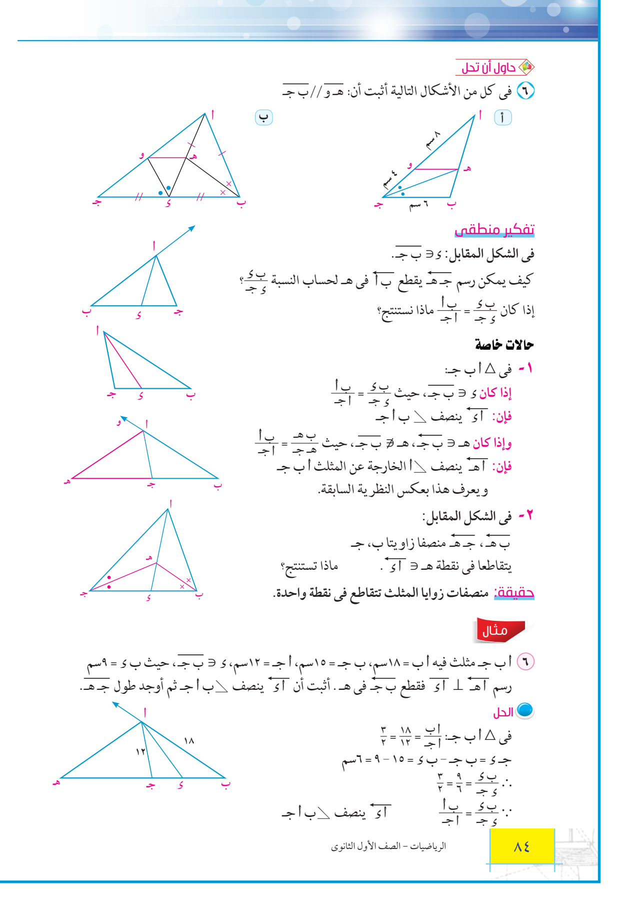
∴ $\overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ب جـ}}$

(ب) فى △ ا ب ى: $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ ب

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ ى}}$ (١)

فى △ ا ى جـ $\overleftrightarrow{\text{ى و}}$ ينصف ∠ ا ى جـ

$\frac{\text{ا ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ا و}}{\text{و جـ}}$ (٢)



حاول أن تحل

٦ فى كل من الأشكال التالية أثبت أن: $\overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ب جـ}}$

أ ب

تفكير منطقى

فى الشكل المقابل: ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$.

كيف يمكن رسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ يقطع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ فى هـ لحساب النسبة $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$؟

إذا كان $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ماذا نستنتج؟

حالات خاصة

١- فى △ أ ب جـ:

إذا كان ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$، حيث $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

فإن: $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

وإذا كان هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$، هـ ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$، حيث $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

فإن: $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن المثلث أ ب جـ

ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{ب هـ}}$، $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ منصفا زاويتا ب، جـ

يتقاطعا فى نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$. ماذا تستنتج؟

حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

مثال

٦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٨سم، ب جـ = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$، حيث ب ى = ٩سم رسم $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ فقطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. أثبت أن $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ثم أوجد طول $\overline{\text{جـ هـ}}$.

الحل

فى △ أ ب جـ: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

جـ ى = ب جـ − ب ى = ١٥ − ٩ = ٦سم

$\therefore \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

$\because \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٨٤

$\because$ أ ب = أ ى، ب ى = ى جـ

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى جـ}}$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ى}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و جـ}}$

فى △ أ ى هـ $\because \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ى}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و جـ}}$

$\therefore \overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ى جـ}}$

$\therefore \overline{\text{ى جـ}} \subset \overline{\text{ب جـ}}$ $\therefore \overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ب جـ}}$

تفكير منطقى: فى بند تفكير منطقى ناقش ما توصل إليه طلابك من استنتاجات مؤكدًا على ما هو صحيح فيها واستبعاد الاستنتاجات الأخرى ومن خلال أسلوب الاكتشاف الموجه ساعد طلابك على اكتشاف ما ورد فى بند حالات خاصة.

اطلب من طلابك استخدام الأدوات الهندسية فى إدراك العلاقة بين منصفات زوايا المثلث من الداخل ودعهم يستنتجوا ما ورد فى بند حقيقة صفحة ٨٤.

ويمكنك تقديم البرهان التالى لهذه الحقيقة:

فى △ أ ب ى: $\because$ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ ب

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ى}}$ (١)

فى △ أ جـ ى: $\because$ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ جـ

$\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ى}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ى}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ى}}$ وبإبدال الوسطين

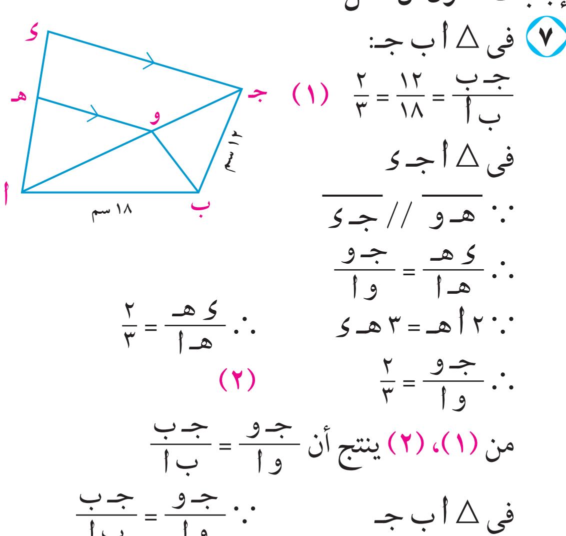
$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$ $\therefore$ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ أ

أى أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة.

- ناقش مع طلابك ما ورد فى مثال ٦ صـ٨٤ ومثال ٧ صـ٨٥ واطلب إليهم حل ما ورد فى بند **حاول أن تحل** رقم ٧، ٨ صفحة ٨٥ من كتاب الطالب مع متابعة حلولهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:



٧ فى △ أ ب جـ:

$\frac{\text{جـ ب}}{\text{أ ب}} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$ (١)

فى △ أ جـ ى

$\because \overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{جـ ى}}$

$\therefore \frac{\text{ى هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و أ}}$

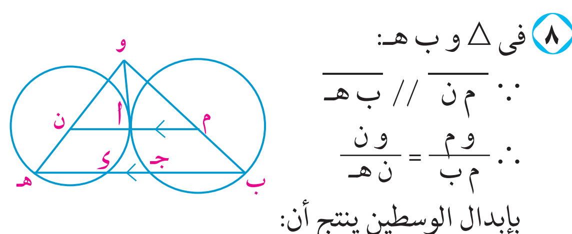
$\because$ ٢ أ هـ = ٣ ى هـ $\therefore \frac{\text{ى هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\text{جـ و}}{\text{أ و}} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{\text{جـ و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{أ ب}}$

فى △ أ ب جـ $\because \frac{\text{جـ و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{أ ب}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ ب



٨ فى △ و ب هـ:

$\because \overline{\text{م ن}} // \overline{\text{ب هـ}}$

$\therefore \frac{\text{م و}}{\text{م ب}} = \frac{\text{و ن}}{\text{ن هـ}}$

بإبدال الوسطين ينتج أن:

$\frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ن هـ}}$ (١)

∵ نقطة تماس دائرتين يقع على خط المركزين

∴ أ ∈ م ن ويكون م ب = م أ، ن هـ = ن أ **(٢)**

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ ن}}$

∴ و أ ينصف ∠ م و ن

التدريب والتقييم

أولاً: إجابات تحقق من فهمك

في △ أ ب هـ: ∵ أ ب = ب هـ، ق (∠ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ب أ هـ) = ٤٥° **(١)**

و ق (∠ب أ ى) = ٩٠° خواص المستطيل

∴ ق (∠ى أ س) = ٤٥° **(٢)**

من (١)، (٢) ينتج أن

ق (∠ب أ س) = ق (∠ى أ س) = ٤٥°

∴ أ س ينصف ∠ أ في △ أ ب ى

ويكون: $\frac{\text{ب س}}{\text{س ى}} = \frac{٤٢}{٥٦} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب س + س ى}} = \frac{٣}{٣ + ٤}$ خواص التناسب

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب ى}} = \frac{٣}{٧}$

ويكون $\frac{\text{م (△أ ب س)}}{\text{م (△أ ب ى)}} = \frac{٣}{٧}$

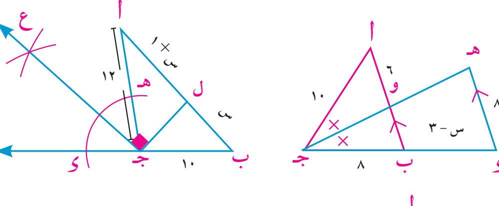
(المثلثان لهما نفس الارتفاع)

∴ م (△أ ب س) = $\frac{٣}{٧} \times \frac{١}{٢} \times ٤٢ \times ٥٦ = ٥٠٤$ متر مربع.

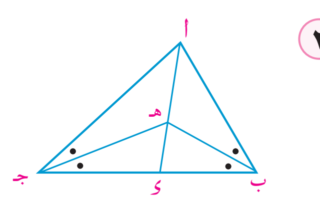
التقييم

① في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س

(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



②



في الشكل المقابل: ى ∈ ب جـ، هـ ∈ أ ى ، ب هـ ينصف ∠ب، ب هـ ينصف ∠ جـ.

∵ أ هـ ⊥ أ ى ويقطع ب جـ في هـ

∴ أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة عن △ أ ب جـ ويكون $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

∵ ب هـ = ب جـ + جـ هـ ∴ $\frac{١٥ + \text{جـ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{١٨}{١٢}$ جـ هـ = ٣٠سم

حاول أن تحل

⑦ أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أ ب = ١٨سم، ب جـ = ١٢سم. هـ ∈ أ ى بحيث ٢ أ هـ = ٣ هـ ى رسم هـ و // ى جـ فقطع أ جـ في و. أثبت أن ب و ينصف ∠ أ ب جـ.

مثال

⑦ أ ب قطر في دائرة، أ جـ وتر فيها. رسم جـ ى مماس للدائرة عند جـ فقطع أ ب في ى.

إذا كانت هـ ∈ أ ب بحيث $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ أثبت أن:

(أ) أ جـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ى هـ عند جـ. (ب) $\frac{\text{ى أ}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$

الحل

∵ $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (١)

∴ جـ ب ينصف ∠ جـ في △ ى جـ هـ.

∵ أ ب قطر في الدائرة

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° ويكون جـ أ ⊥ جـ ب

∵ جـ ب ينصف ∠ جـ في △ أ ب جـ

∴ جـ أ منصف للزاوية الخارجة عند جـ (منصفا الزاوية متعامدان) (وهو المطلوب أولًا)

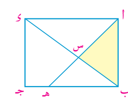
ويكون $\frac{\text{ى أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{ى أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ى أ}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ (وهو المطلوب ثانيًا)

حاول أن تحل

⑧ دائرتان م، ن متماستان من الخارج في أ. رسم مستقيم يوازي م ن فقطع الدائرة م في ب، جـ، والدائرة ن في ى، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع ب م، هـ ن في النقطة و. أثبت أن أ و ينصف ∠ م و ن.

تحقق من فهمك



حل مشكلات: يبين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين ب ى، أ هـ، حيث هـ ∈ ب جـ، ب ى ∩ أ هـ = {س}.

فإذا كان أ ب = ب هـ = ٤٢مترًا، أ ى = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أ ب س بالأمتار المربعة و طول أ س

كتاب الطالب - الفصل الدراسي الأول ٨٥

إذا كان: ٤ب ى = ٣ ى جـ، أ ب = ١٨سم

أوجد طول أ جـ.

إجابات التقييم

① (أ) س = ١٠

(ب) من هندسة الشكل ∴ جـ ع ينصف ∠ جـ الخارجة فيكون جـ ل منصف داخلى للزاوية جـ

∴ $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}}$ ∴ س = ٥

② أ جـ = ٢٤ سم

نشاط إثرائي للطلاب المتفوقين:

① أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه ب أ < أ جـ رسم أ ى ⊥ ب جـ ، أ هـ ينصف ∠ أ، و يقطع ب جـ في هـ

أثبت أن: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى جـ}}$.

ثالثًا: التدريب

اطلب من طلابك حل تمارين مختارة من كراسة الأنشطة والتدريبات من صفحتي ٤١، ٤٢ مع متابعة حلولهم.

٣ - ٣

تطبيقات التناسب فى الدائرة

Applications of Proportionality in the Circle

خلفية

درس الطالب علاقات رياضية بين أوتار الدائرة ومستقيمات (أو قطع مستقيمة) مرسومة بشروط معينة، والآن سوف يدرس علاقات رياضية جديدة فى الدائرة مثل قوة نقطة بالنسبة لدائرة، وقياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة، بالإضافة إلى تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى لزاوية معينة.

أهداف الدرس

فى نهاية الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- يحدد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- يوجد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.
- ينمذج ويحل تطبيقات تشمل تطبيقات التناسب فى الدائرة.

مفردات أساسية

قوة نقطة – دائرة – وتر – مماس – قاطع – قطر – دوائر متحدة المركز – مماس خارجى مشترك – مماس داخلى مشترك.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

تعلم تعاونى – اكتشاف موجه – طريقة استنباطية – عرض ومناقشة – حل مشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٨٦ إلى صفحة ٩٢

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحتى ٤٣، ٤٤

الشبكة الدولية للمعلومات (الأنترنت)

إجراءات الدرس

التمهيد: فكر وناقش

يهدف ما ورد فى بند فكر وناقش إلى أن يدرك الطالب المفهوم الهندسى لبعض خصائص التناسب، مثل الوسط

---

٣ - ٣ تطبيقات التناسب فى الدائرة

Applications of Proportionality in the Circle

سوف تتعلم

- إيجاد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- تحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- إيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.
- نمذجة وحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى لزاوية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قوة نقطة Power of a point
- دائرة Circle
- وتر Chord
- مماس Tangent
- قاطع Secant
- قطر Diameter
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent

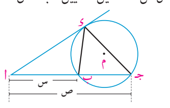
الأدوات والوسائل

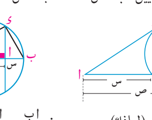
- أدوات هندسية للرسم والقياس

فكر و ناقش

كيف يمكن إنشاء قطعة مستقيمة يكون طولها ل وسطًا متناسبًا بين طولين س، ص لقطعتين معلومتين؟

فى كل من الشكلين التاليين أ ب = س ، أ جـ = ص ، أ ى = ل





∵ △ أ ى ب ~ △ أ جـ ى (لماذا؟) ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{أ جـ}}$

ويكون $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}}{\text{ص}}$ ، $\text{ل}^2 = \text{س} \times \text{ص}$ أى أن ل وسط متناسب بين س، ص

عمل تعاونى

أنشئ قطعًا مستقيمة أطوالها $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{24}$

قارن رسمك مع زملائك وتحقق من صحة إجابتك مستخدمًا الآلة الحاسبة والقياس.

أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

تعريف قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ})$ حيث: $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أ م})^2 - \text{نق}^2$

ملاحظات هامّة

ملاحظة ١

يمكن التنبؤ بموقع نقطة أ بالنسبة للدائرة م

فإذا كان: $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) > 0$ فإن أ تقع خارج الدائرة.

$\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = 0$ فإن أ تقع على الدائرة.

$\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) < 0$ فإن أ تقع داخل الدائرة.

٨٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

المتناسب بين طولين س، ص لقطعتين مستقيمتين معلومتين. تابع عمل الطلاب وصحح ما يرد من أخطاء وعزز الإجابات الصحيحة.

عرض الدرس

وضح للطلاب مفهوم قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كعدد حقيقي و يرمز له بالرمز وم (أ) حيث وم (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} واستخدامه لتحديد موقع نقطة بالنسبة للدائرة، ثم ناقش مع طلابك مثال (١)، صفحة ٨٧ من كتاب الطالب موضحًا مايلي:

إذا كان وم (أ) > ٠ فإن أ تقع خارج الدائرة

وم (أ) = ٠ فإن أ تقع على الدائرة

وم (أ) < ٠ فإن أ تقع داخل الدائرة

- اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند حاول أن تحل رقم: (١) صفحة ٨٧ وتابع حلولهم مع تصحيح ما يرد بها من أخطاء فردية وتعزيز الإجابات الصحيحة.

التقيم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

أ ون (أ) = ١٥ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة ن

ب ون (ب) = ٠ ∴ ب تقع على الدائرة ن

جـ ون (جـ) = −٤ ∴ جـ تقع داخل الدائرة ن

أ هـ = ٢ $\sqrt{٦}$ سم ، ب ن = ٣ سم، جـ ن = $\sqrt{٥}$ سم

مثال إضافي

ما مجموعة النقاط التي لها نفس قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة ن التي طول نصف قطرها ٣سم في الحالات الآتية:

أ ون (أ) = ١٥

ب ون (أ) = صفر.

جـ ون (أ) = −٤

الحل

أ ون (أ) = (أن)^{٢} − نق^{٢}

١٥ = (أن)^{٢} − ٩

(أ ن)^{٢} = ٢٤

أ ن = ٢ $\sqrt{٦}$

∴ مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة ن، وطول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٦}$ سم.

مثال

١ حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٥سم إذا كان:
وم (أ) = ١١ ، وم (ب) = صفر ، وم (جـ) = −١٦، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

الحل

∵ وم (أ) = ١١ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة

∵ وم (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} ∴ ١١ = (أ م)^{٢} − ٢٥ ∴ أ م = ٦سم

∵ وم (ب) = صفر ∴ ب تقع على الدائرة ∴ ب م = ٥سم

∵ وم (جـ) = −١٦ ∴ جـ تقع داخل الدائرة

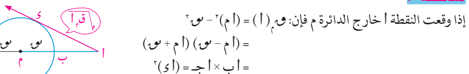
∵ وم (جـ) = (جـ م)^{٢} − نق^{٢} ∴ −١٦ = (جـ م)^{٢} − ٢٥ ∴ جـ م = ٣سم

حاول أن تحل

١ حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة ن التي طول نصف قطرها ٣سم، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية:

أ ون (أ) = ١٥ ب ون (ب) = صفر جـ ون (جـ) = −٤

ملاحظة ٢



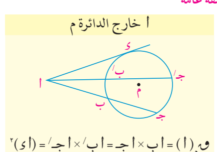
إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م فإن: وم (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢}
= (أ م − نق) (أ م + نق)
= أ ب × أ جـ = (أ ى)^{٢}
∴ طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{\text{وم (أ)}}$

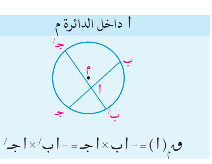
ملاحظة ٣

إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن: وم (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢}
= (أ م − نق)(أ م + نق)
= − (نق − أ م)(أ م + نق)
= − أ ب × أ جـ



وبصفة عامة





مثال

٢ الدائرة م طول نصف قطرها ٣١سم. النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣سم، رسم الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث أ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$، أ ب = ٣ أ جـ احسب:

أ طول الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ ب بعد الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ عن مركز الدائرة.

الحل

في الدائرة م:

أ ∵ نق = ٣١سم، أ م = ٢٣سم، أ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ أ تقع داخل الدائرة ويكون
وم (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} = − أ ب × أ جـ
(٢٣)^{٢} − (٣١)^{٢} = −٣ أ جـ × أ جـ ∴ أ جـ = ١٢سم
∴ طول الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٤ أ جـ = ١٢ × ٤ = ٤٨سم

ب بفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م ى حيث $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$
∵ $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ويكون ب ى = ٢٤سم
∴ (م ى)^{٢} = (٣١)^{٢} − (٢٤)^{٢} = ٣٨٥ ∴ م ى = $\sqrt{٣٨٥}$ ≃ ١٩,٦سم

حاول أن تحل

٢ الدائرة ن طول نصف قطرها ٨سم. النقطة ب تبعد ١٢سم عن مركز الدائرة، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين جـ، ى، حيث جـ ب = جـ ى، احسب طول الوتر $\overline{\text{جـ ى}}$ وبعده عن النقطة ن.

مثال

٣ دائرتان م، ن متقاطعتان في أ ، ب. جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{ب أ}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ فقطع الدائرة م في ى، هـ حيث جـ ى = ٩سم، ى هـ = ٧سم، ورسم $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ يمس الدائرة ن عند و.

أ أثبت أن وم (جـ) = ون (جـ). ب إذا كان أ ب = ١٠سم. أوجد طول كل من $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{جـ و}}$.

الحل

أ ∵ جـ تقع خارج الدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ قاطعان للدائرة م.
∴ وم (جـ) = جـ ى × جـ هـ = جـ أ × جـ ب (١)
∵ جـ تقع خارج الدائرة ن، $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ قاطع، $\overline{\text{جـ و}}$ مماس لها.
∴ ون (جـ) = جـ أ × جـ ب = (جـ و)^{٢} (٢)
من (١)، (٢) ∴ وم (جـ) = ون (جـ) = ٩ × ١٦ = ١٤٤

ب ∵ أ ب = ١٠سم ∴ ون (جـ) = جـ أ (جـ أ + ١٠) = (جـ و)^{٢} = ١٤٤
∵ (جـ أ)^{٢} + ١٠ جـ أ = ١٤٤ ∴ جـ أ = ٨سم
∵ (جـ و)^{٢} = ١٤٤ ∴ جـ و = ١٢سم



تطبيقات التناسب فى الدائرة

ملاحظة هامّة

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين.

فإذا كان $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ **فإن** أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م، ن.

فى المثال السابق لاحظ أن: $ق_م(جـ) = ق_ن(جـ)$ ، $ق_م(أ) = ق_ن(أ) =$ صفرًا ، $ق_م(ب) = ق_ن(ب) =$ صفرًا

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

حاول أن تحل

٣ الدائرتان م، ن متماستان من الخارج فى أ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك للدائرتين م، ن، $\overleftarrow{ب جـ}$ يقطع الدائرة م فى جـ، ى، $\overleftarrow{ب هـ}$ يقطع الدائرة ن فى هـ، و على الترتيب.

أ **أثبت أن:** $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن

ب إذا كان $ق_م(ب) = ٣٦$ ، ب جـ = ٤سم ، هـ و = ٩سم. **أوجد طول كل من** $\overline{جـ ى}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب هـ}$.

ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزوايا

سبق ودرست:

١- إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$

فإن: $ق(\angle أ هـ جـ) = \frac{١}{٢}[ق(\overset{\frown}{أ جـ}) + ق(\overset{\frown}{ى ب})]$

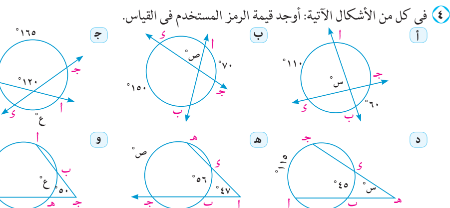
٢- إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$

فإن: $ق(\angle أ هـ جـ) = \frac{١}{٢}[ق(\overset{\frown}{أ جـ}) - ق(\overset{\frown}{ى ب})]$

حاول أن تحل

٤ فى كل من الأشكال الآتية: أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.



كتاب الطالب - الفصل الدراسى الأول ٨٩

ب $ق_ن(أ) = (أ ن)^٢ - نق^٢$

∴ النقط تقع على الدائرة ن، وتكون مجموعة النقط المطلوبة هى دائرة مطابقة للدائرة ن.

جـ $ق_ن(أ) = (أ ن)^٢ - ٩ = -٤$

$(أ ن)^٢ = ٥ \leftarrow أ ن = \sqrt{٥}$

مجموعة النقط هى دائرة مركزها ن وطول نصف قطرها $\sqrt{٥} < ٣$

أى أن مجموعة النقط هى دائرة تقع داخل الدائرة ن ولها نفس المركز.

- ناقش مع طلابك مثال (٢) صـ٨٨ من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم حل بند حاول أن تحل (٢).

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

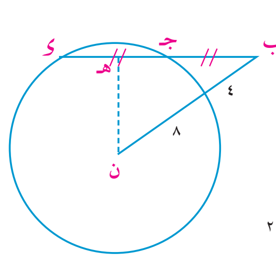
١ ن ب > نق

∴ ب تقع خارج الدائرة

$ق_ن(ب) = (ب ن)^٢ - نق^٢$

= ب جـ × ب ى

$(١٢)^٢ - (٨)^٢ = ٢ (ب جـ)^٢$



$(ب جـ)^٢ = \frac{٨٠}{٢}$ ب جـ $= ٢\sqrt{١٠} =$ جـ ى

$\overline{ن هـ} \perp \overline{جـ ى}$ ∴ جـ هـ $= \sqrt{١٠}$ سم

$(ن هـ)^٢ = (٨)^٢ - (\sqrt{١٠})^٢ = ٥٤$

ن هـ $= ٣\sqrt{٦}$ سم.

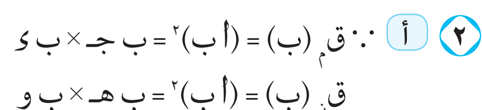
- وضح للطلاب أنه عندما تتساوى قوة نقطة بالنسبة لدائرتين مختلفتين فإن هذه النقطة تقع على مستقيم يسمى بالمحور الأساسى للدائرتين فإذا كان $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ ، $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$

فإن $\overleftrightarrow{أ ب}$ هو محور أساسى للدائرتين م، ن

التقييم المستمر

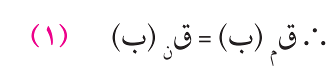
اطلب من طلابك حل ما ورد فى حاول أن تحل ٣ ص ٩٠ من كتاب الطالب وتابع إجاباتهم.

إجابة حاول أن تحل



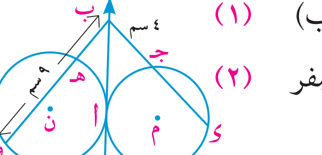
٢ أ ∵ $ق_م(ب) = (أ ب)^٢ =$ ب جـ × ب ى

$ق_ن(ب) = (أ ب)^٢ =$ ب هـ × ب و



∴ $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$ (١)

$ق_م(أ) = ق_ن(أ) =$ صفر (٢)



من (١)، (٢)

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

ب ∵ $ق_م(ب) = ٣٦$

∴ ب جـ × ب ى = $(ب أ)^٢$ = ب هـ × ب و = ٣٦

ويكون: ٤ × ب ى = ٣٦

∴ ب ى = ٩ سم أى أن جـ ى = ٥سم

$(ب أ)^٢ = ٣٦$ ∴ ب أ = ٦سم

ب هـ × ٩ = ٣٦ ∴ ب هـ = ٤سم.

- راجع مع طلابك العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية التى لها نفس القوس واطلب إليهم استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين للدائرة فى نقطة:
  أولا: داخل الدائرة.
  ثانيًا: خارج الدائرة.
- ناقش هذه الاستنتاجات مؤكدًا على ماهو صحيح منها واستبعاد الاستنتاجات الأخرى.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند **حاول أن تحل** رقم (٤) صفحة ٩٠، رقم (٥) صفحة ٩١ وتابع حلولهم.

إجابات حاول أن تحل:

٣ أ س = ٨٥   ب ص = ٧٠
جـ ع = ٩٥   د س = ٣٥
هـ ص = ١٥٠   و ع = ٦٠

- اطلب إلى طلابك استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس (أو مماسين) لدائرة وتوصل معهم إلى نص التمرين المشهور الوارد فى ص ٩٠ من كتاب الطالب، واطلب إلى متطوع عرض البرهان على السبورة وتصحيح ما يرد من أخطاء وتعزيز الإجابات الصحيحة.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ماورد فى حاول أن تحل (٥) ص ٩٠ من كتاب الطالب وتابع حلولهم.

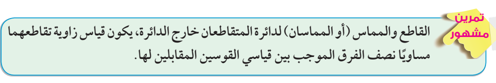
إجابات حاول أن تحل:

٤ أ س = ٣٥   ب ص = ١١٠
جـ س = ١٠٠ ، ص = ٦٥ ، ع = ٤٠

تجنب الخطأ: قد يخطئ الطلاب فى تحديد أقواس الزوايا وقياساتها راجع مع طلابك كيفية تعيين قوس زاوية وكيفية حساب قياسه.

الربط بالأقمار الصناعية: يعرض مثال (٤) تطبيقًا حياتيًا لربط الموضوع بالأقمار الصناعية - ناقش هذا المثال مع طلابك، ثم اطلب إليهم حل ماورد فى بند **حاول أن تحل** رقم ٦، ٧.

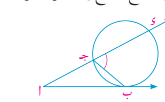
استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس (أو مماسين) لدائرة.



تمرين مشهور القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

البرهان

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة.



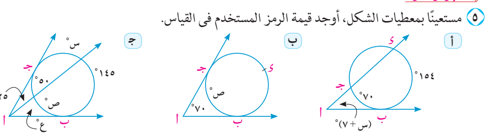
∵ ∠ ى جـ ب خارجة عن △أ ب جـ
∴ ق(∠أ) = ق(∠ب جـ ى) − ق(∠جـ ب أ)
= ½ ق(ب ى) − ½ ق(ب جـ)
= ½ [ق(ب ى) − ق(ب جـ)]

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة.

∵ ∠ ى جـ ب خارجة عن △أ ب جـ
∴ ق(∠أ) = ق(∠ب جـ ى) − ق(∠جـ ب أ)
= ½ ق(ب س جـ) − ½ ق(ب جـ)
= ½ [ق(ب س جـ) − ق(ب جـ)]

حاول أن تحل

٥ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.



مثال

٤ **الربط بالأقمار الصناعية:** يدور قمر صناعى فى مدار، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°. فأوجد:
أ قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.
ب طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

٩٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٥ ق(∠أ) = ½ [ق(ب س جـ) − ق(ب جـ)]
٤٠° × ٢ = ق(ب س جـ) − ٣٦٠° + ق(ب س جـ)
∴ ق(ب س جـ) = ١٨٠° + ٤٠° = ٢٢٠°
∴ طول القوس ب جـ الأكبر = $\frac{٢٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × π × ٩
= ١١π ≃ ١٩,٧٥سم

٦ أ ∵ قم(أ) = ١٤٤
∴ طول المماس = $\sqrt{قم(أ)}$
= ١٢ سم

ب في △ أ ب م يكون:
أ م = ١٥سم (فيثاغورث)
∴ أ س × ١٥ = ١٤٤
∴ أ س = ٩,٦ سم

الحل

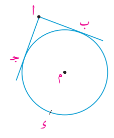
نمذجة المشكلة: باعتبار الدائرة م هى دائرة خط الاستواء يكون ق(ب⌒جـ) = ٥٤°، وطول ب⌒جـ = ٦٠١١ كم.

أ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب⌒ى جـ) = ٣٦٠° − ٥٤° = ٣٠٦°

ويكون ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب⌒ى جـ) − ق(ب⌒جـ)]

= $\frac{١}{٢}$ (٣٠٦° − ٥٤°) = ١٢٦°



ب فى الدائرة يتناسب طول القوس مع قياسه

$\frac{٦٠١١}{٢ \times \pi \times نق} = \frac{٥٤°}{٣٦٠°}$ ∴ نق = ٦٣٧٧,٨٧ كم

∴ طول نصف قطر الأرض عند خط الاستواء ≃ ٦٣٧٨ كم.

تذكر: $\frac{طول القوس}{محيط دائرته} = \frac{قياس القوس}{قياس الدائرة}$

حاول أن تحل

٦ تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ. فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠°. فأوجد طول ب⌒جـ الأكبر، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩سم.

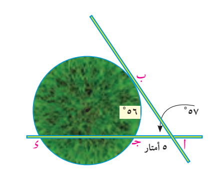
٧ **فى الشكل المقابل**: دائرة م طول نصف قطرها ٩سم، أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة عند ب، جـ. أ م يقطع الدائرة فى ى، ب جـ في س رسم ب ى فقطع أ جـ فى هـ. إذا كان قم(أ) = ١٤٤ أوجد:

أ طول أ ب

ب طول أ س.

تحقق من فهمك

حل مشكلات: **يبين الشكل المقابل** مخططًا لحديقة على شكل دائرة. أنشئ ممرين للمشاة أحدهما خارج الحديقة يمسها فى النقطة ب والآخر يقطع الحديقة فى نقطتى جـ، ى ويتقاطع الممران عند أ.
إذا كان قم(أ) = ١٠٠، أ جـ = ٥ أمتار.
أوجد طول كل من أ ب ، جـ ى ، ثم أوجد ق(ب⌒ى).



التدريب والتقييم

أولاً: إجابات تحقق من فهمك:

∵ قم(أ) = ١٠٠

∴ أ ب = ١٠ أمتار

∵ أ جـ = ٥

∴ ١٠٠ = ٥ (٥ + جـ ى)

∴ جـ ى = ١٥ متر

ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب⌒ى) − ق(ب⌒جـ)]

∵ ٥٧° × ٢ = ق(ب⌒ى) − ٥٦°

∴ ق(ب⌒ى) = ١١٤° + ٥٦° = ١٧٠°

ثانيًا: التقييم :

١ حدد موقع النقطة أ بالنسبة لدائرة م طول نصف قطرها ٦سم، حيث:

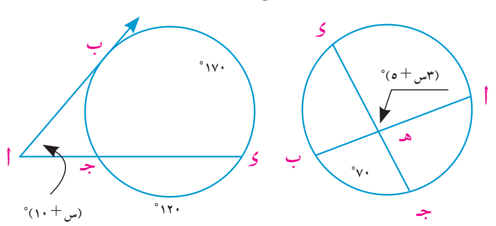
أ قم(أ) = ١٨

ب قم(أ) = −١٢

جـ قم(أ) = صفر.

د قم(أ) = −٣٦

٢ مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة س:



إجابات التقييم:

١ أ خارج الدائرة .

ب داخل الدائرة.

جـ على الدائرة.

د تنطبق على مركز الدائرة.

٢ أ س = ٣٠

ب ٤٠

ثالثًا: التدريب

اطلب إلى طلابك حل بعض التمارين الواردة بكراسة الأنشطة والتدريبات مع متابعة حلولهم.

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

Trigonometry

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب النسب المثلثية للزاوية الحادة وفي هذه الوحدة سوف يدرس الدوال المثلثية للزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى، كما سيتعرف على التمثيل البياني لبعض هذه الدوال واستنتاج خواص كل منها، وذلك من خلال ستة دروس وهى:

الدرس الأول: الزاوية الموجهة.

الدرس الثانى: القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.

الدرس الثالث: الدوال المثلثية.

الدرس الرابع: الزوايا المنتسبة.

الدرس الخامس: التمثيل للدوال المثلثية.

الدرس السادس: إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة .
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى).
- يتعرف القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة .
- يحدد إشارات الدوال المثلثية.
- يتعرف أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى).
- يتعرف القياس الدائرى للزوايا المركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى القياس الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية .
- يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة.
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة ($١٨٠° \pm \theta$)، ($٣٦٠° \pm \theta$)، ($٩٠° \pm \theta$)، ($٢٧٠° \pm \theta$).
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:
  - جا أس = جتا ب س
  - ظا أس = ظتا ب س
  - قا أس = قتا ب س
- يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم النسب المثلثية لها.
- يتعرف التمثيل البيانى لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتى تمثلها دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

المصطلحات الأساسية

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية موجهة Directed Angle
- زاوية نصف قطرية (راديان) Radian
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive Measure
- قياس سالب Negative Measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrant Angle
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent
- دالة دائرية Circular Function
- الزاوايا المتنسبة Related Angles

- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة $(\theta \pm {}^\circ١٨٠)$، $(\theta \pm {}^\circ٣٦٠)$، $(\theta \pm {}^\circ٩٠)$، $(\theta \pm {}^\circ٢٧٠)$
- يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم الدوال المثلثية لها.
- يتعرف التمثيل البيانى لدالتى الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منها.
- يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية، والتى تمثل دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

زمن تدريس الوحدة

١٢ ساعة.

الوسائل التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية - جهاز كمبيوتر - برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة - العصف الذهنى - المحاضرة - الطريقة الاستقرائية - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

حل المشكلات - التفكير الناقد - التفكير الاستدلالى - التفكير التحليلى - التفكير الإبداعى فى الرياضيات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية وأنشطة العمل التعاونى وأسئلة حاول أن تحل، أسئلة تحقق من فهمك، والأسئلة الواردة فى تمارين على الوحدة واختبار نهاية الوحدة، والاختبار التراكمى.

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): الزاوية الموجهة.
الدرس (٤ - ٢): القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.
الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية.
الدرس (٤ - ٤): الزاويا المنتسبة.
الدرس (٤ - ٥): التمثيل البيانى للدوال المثلثية.
الدرس (٤ - ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلى - برامج رسم بيانى.

نبذه تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التى اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده فى الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

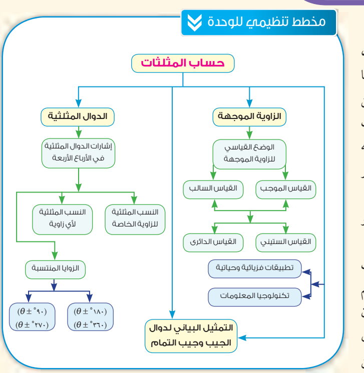
ويعد الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى (٩٤٠ - ٩٩٨م) فى القرن العاشر الميلادى، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكروى (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير.

حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم فى دفع عجلة التقدم والازدهار.

مخطط تنظيمي للوحدة



٤ - ١

الزاوية الموجهة

Directed Angle

خلفية

سبق للطالب دراسة الزاوية على أنها اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة، وفى هذا الدرس سوف يدرس الطالب الزاوية الموجهة على أنها زوج مرتب، ثم يحدد الوضع القياسى للزاوية الموجهة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الزاوية الموجهة.
- يتعرف الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يحدد موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى.
- يحدد مجموعة الزوايا المتكافئة من بين زوايا معطاة.

مفردات أساسية

زاوية موجهة – وضع قياسى – قياس ستينى – قياس موجب – قياس سالب – زاوية مكافئة.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

التعلم التعاونى – المناقشة.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٩٦ إلى صفحة ١٠١

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٠ إلى صفحة ٥١

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

فى بند «فكر وناقش»: ذكر طلابك بأنه قد تم دراسة الزاوية على أنها اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية والشعاعين هما ضلعا الزاوية. مستعينًا



٤ - ١

الزاوية الموجهة

Directed Angle

سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثي المتعامد.
- مفهوم الزوايا المتكافئة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قياس ستينى Degree Measure
- زاوية موجهة Directed angle
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive measure
- قياس سالب Negative measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrantal Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هى اتحاد شعاعيين لهما نقطة بداية واحدة.

في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «رأس الزاوية».

والشعاعان ب أ ، ب جـ ضلعا الزاوية.

أى أن: ب أ ∪ ب جـ = (∠ أ ب جـ)

وتكتب كذلك أ ب̂ جـ.

القياس الستينى للزاوية Degree Measure System

علمت أن القياس الستينى يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول. وبالتالى فإن:

١- الزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (١َ)

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (١ً)

أى أن: ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

تعلم

الزاوية الموجهة Directed Angle

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب (و أ ، و ب) حيث العنصر الأول و أ هو الضلع الابتدائى للزاوية، العنصر الثانى و ب هو الضلع النهائى للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).

أما إذا كان الضلع الابتدائى و ب، الضلع النهائى و أ فتكتب عندئذ (و ب، و أ) كما فى شكل (٢).

٩٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

بالشكل المرسوم صفحة (٩٦) من كتاب الطالب وضح لطلابك أن:

ب أ ∪ ب جـ = ب جـ ∪ ب أ وأن:

∠ أ ب جـ هى نفسها ∠ جـ ب أ.

عمل تعاوني

- قسم الطلاب إلى مجموعتين واطلب إلى المجموعة الأولى تحويل ٤٣,٧° إلى درجات ودقائق واطلب إلى المجموعة الثانية تحويل ٢٨° ٦َ ٣٦ً إلى درجات وأجزائها.

إجابات عمل تعاوني: ٤٣,٧° = ٠,٧° + ٤٣°

= ٠,٧ × ٦٠َ + ٤٣°

= ٤٢َ ٤٣°

عند تحويل ٢٨° ٦َ ٣٦ً = $\frac{٣٦}{٦٠ \times ٦٠}$ + $\frac{٦}{٦٠}$ + ٢٨°

= ٢٨,١١°

عرض الدرس

تعلم: الزاوية الموجهة

- وضح لطلابك الفرق بين مفهوم الزاوية الموجهة كزوج مرتب وقياس الزاوية الموجهة كعدد حقيقي.

التقييم المستمر

إجابة تفكير ناقد صفحة (٩٧)

ذكر طلابك أنه طالما وضعت الزاوية على صورة زوج مرتب فإنها تخضع لخصائص الزوج المرتب بمعنى أن (و أ ، و ب) ≠ (و ب ، و أ) لأنه لابد وأن يكون و أ هو الضلع الابتدائي للزاوية، و ب هو الضلع النهائي للزاوية.

- وضح لطلابك متى تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي موضحًا بالأمثلة ومستعينًا بما ورد في كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابات تعبير شفهي صفحة (٩٧)

- وضح لطلابك أثناء الإجابة أنه لابد من توفر عنصرين حتى تكون الزاوية في الوضع القياسي، أولها أن تكون بداية الشعاع الابتدائي هي نقطة الأصل، وثانيها أن يقع على الجزء الموجب لمحور السينات، والإجابات الصحيحة هي: ب، ء، و.

إجابة حاول أن تحل صفحة (٩٧)

(١) الإجابة الصحيحة هي جـ فقط؛ لأنها تحقق تعريف الزاوية المتجهة.

تجنب الخطأ:

(١) أكد على طلابك قبل إيجاد قياس الزاوية الموجهة أن تحدد اتجاهها ، هل هي في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ليكون القياس موجبًا أو في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة ليكون القياس سالبًا، ثم أوجد قياس الزاوية بعد ذلك.

(٢) بين للطلاب أنه عندما يقسم المستوى الإحداثي المتعامد الزاوية إلى أربعة أرباع أن يكون بدء القياس من الوضع الابتدائي للزاوية و س، وأن يكون مأخوذًا في اتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

إجابة حاول أن تحل صفحة (٩٨)

(٢) (أ) ٣٣٩° (ب) –٢٧٠° (جـ) ٢٤٥° (د) –٣٠٤°

- ناقش مع طلابك موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد مستعينًا بما ورد في كتاب الطالب صفحتي (٩٨)، (٩٩).

تعريف: الزاوية الموجهة هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.

تفكير ناقد:
هل (و أ ، و ب) = (و ب ، و أ)؟ فسِّر إجابتك.

الوضع القياسي للزاوية الموجهة Standard position of the directed angle

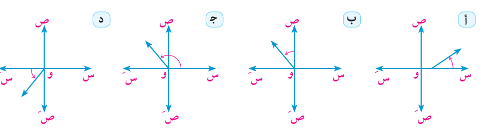
تكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

هل ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي؟ فسِّر إجابتك.

تعبير شفهي
أيٌّ من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسِّر إجابتك.

أ (أ جـ ، جـ ء) ب (و أ ، و هـ)
جـ (و هـ ، و أ) د (و أ ، و ز)
هـ (و ب ، و ز) و (و أ ، و ب)

حاول أن تحل
(١) أي الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي؟ فسِّر إجابتك.



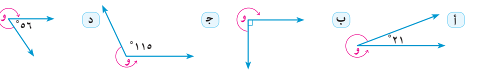
القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:
Positive and negative measures of a directed angle

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي و أ إلى الضلع النهائي و ب ، في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.
في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي و أ إلى الضلع النهائي و ب ، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

مثال
(١) أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:

الحل
نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي ٣٦٠°
أ θ = ٣٦٠° – (٥٥°) = ٣٠٥° ب θ = –٣٦٠° – ٣٣° = –٣٢٧°
جـ θ = ٣٦٠° – ١٢٥° = ٢٣٥° د θ = –(٣٦٠° – ١٣٤°) = –٢٢٦°

حاول أن تحل
(٢) أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد: Angle's position in the orthogonal coordinate plane

يقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل المقابل.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٩٩)

٣ أ ٠° > ٨٨° > ٩٠° ⟵

فهى تقع فى الربع الأول.

ب ٩٠° > ١٥٢° > ١٨٠° ⟵

فهى تقع فى الربع الثاني.

ج ١٨٠° ⟵ زاوية ربعية.

د ٢٧٠° > ٣٠٠° > ٣٦٠° ⟵

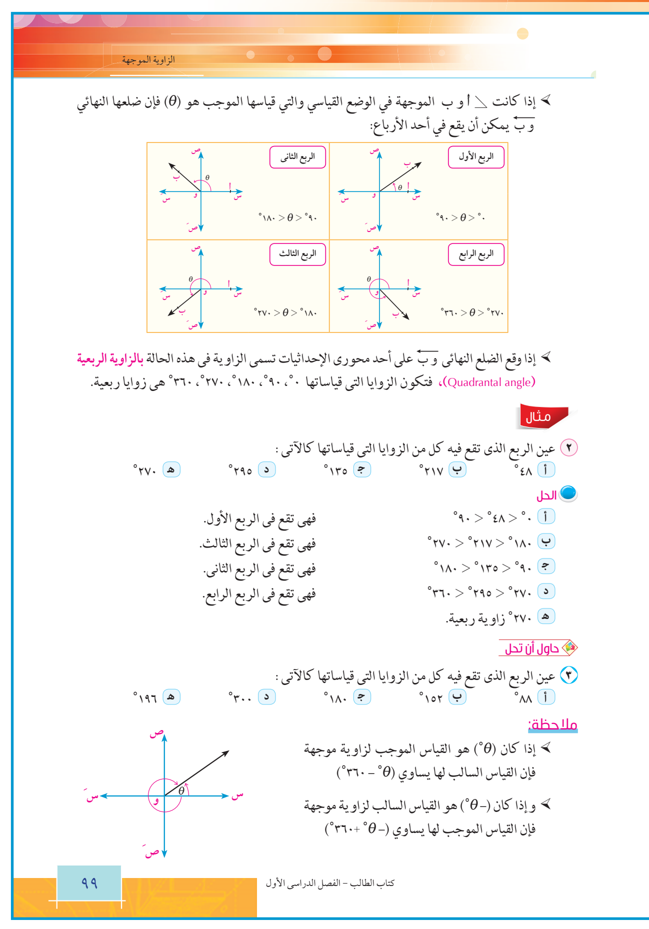
فهى تقع فى الربع الرابع.

هـ ١٨٠° > ١٩٦° > ٢٧٠° ⟵

فهى تقع فى الربع الثالث.

إرشاد:

فى بند ملاحظة صفحة (٩٩) وضح لطلابك أنه عند إيجاد القياس الموجب لزاوية موجهة أو القياس السالب لها فإن: المجموع العددى للقياسين الموجب والسالب = ٣٦٠° أى |القياس الموجب لزاوية ما| + |القياس السالب لنفس الزاوية| = ٣٦٠° ، وذلك حتى يتحقق الطالب من صحة إجاباته.



➢ إذا كانت ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي و ب يمكن أن يقع في أحد الأرباع:

➢ إذا وقع الضلع النهائى و ب على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية فى هذه الحالة **بالزاوية الربعية** (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التى قياساتها ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° هى زوايا ربعية.

مثال

٢ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ ٤٨° ب ٢١٧° ج ١٣٥° د ٢٩٥° هـ ٢٧٠°

الحل

أ ٠° > ٤٨° > ٩٠° فهى تقع فى الربع الأول.

ب ١٨٠° > ٢١٧° > ٢٧٠° فهى تقع فى الربع الثالث.

ج ٩٠° > ١٣٥° > ١٨٠° فهى تقع فى الربع الثانى.

د ٢٧٠° > ٢٩٥° > ٣٦٠° فهى تقع فى الربع الرابع.

هـ ٢٧٠° زاوية ربعية.

حاول أن تحل

٣ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ ٨٨° ب ١٥٢° ج ١٨٠° د ٣٠٠° هـ ١٩٦°

ملاحظة:

➢ إذا كان (θ°) هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها يساوي (θ° – ٣٦٠°)

➢ وإذا كان (–θ°) هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها يساوي (–θ° +٣٦٠°)

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٠)

٤ أ –٣٢٨° ب –٩٠°

ج –١٥٠° د –٤٥°

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٠)

٥ أ ٣٠٨° ب ٢٣٤°

ج ٢٧٠° د ٤٠°

٦ ٩٠° > ١٥٠° > ١٨٠°

لذلك فإن الزاوية تقع فى الربع الثانى.

الزوايا المتكافئة:

فى بند الزوايا المتكافئة أعط أمثلة من عندك لتحديد الزاوية الموجهة (θ) فى الوضع القياسى، ويمكنك الاستعانة بالأمثلة التالية:

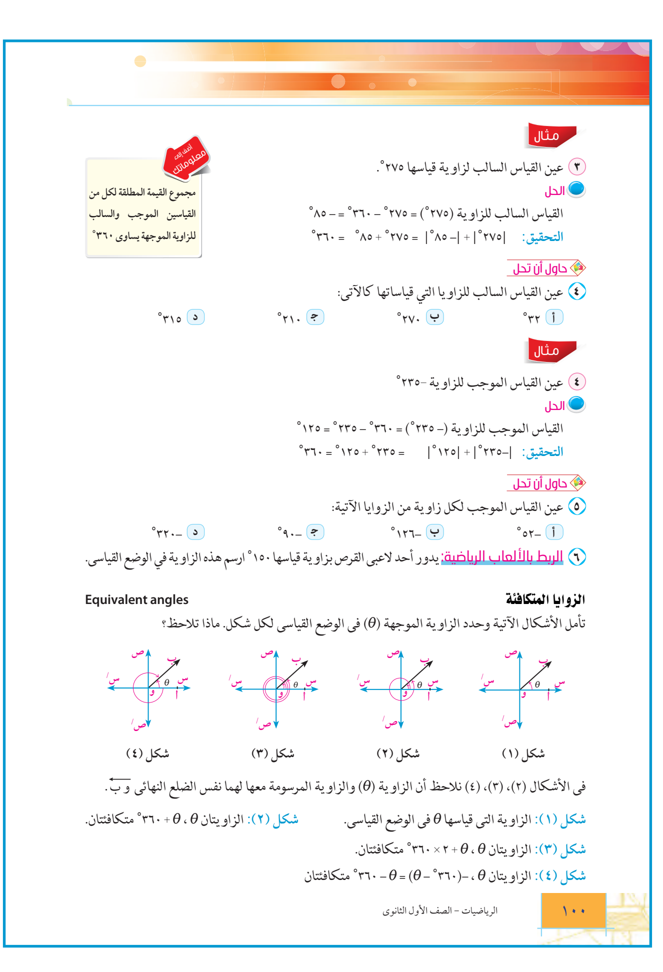
أمثلة إضافية:

عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتي:

أ ٤٢٠° ب ٤٩٥° ج ٩٣٠° د –٦٣٠°

الإجابة:

أ الربع الأول ب الربع الثانى ج الربع الثالث



مثال

٣ عين القياس السالب لزاوية قياسها ٢٧٥°.

الحل

القياس السالب للزاوية (٢٧٥°) = ٢٧٥° – ٣٦٠° = –٨٥°

التحقيق: |٢٧٥°| + |–٨٥°| = ٢٧٥° + ٨٥° = ٣٦٠°

أضف إلى معلوماتك: مجموع القيمة المطلقة لكل من القياسين الموجب والسالب للزاوية الموجهة يساوى ٣٦٠°

حاول أن تحل

٤ عين القياس السالب للزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٣٢° ب ٢٧٠° ج ٢١٠° د ٣١٥°

مثال

٤ عين القياس الموجب للزاوية –٢٣٥°

الحل

القياس الموجب للزاوية (– ٢٣٥°) = ٣٦٠° – ٢٣٥° = ١٢٥°

التحقيق: |–٢٣٥°| + |١٢٥°| = ٢٣٥° + ١٢٥° = ٣٦٠°

حاول أن تحل

٥ عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ –٥٢° ب –١٢٦° ج –٩٠° د –٣٢٠°

٦ الربط بالألعاب الرياضية: يدور أحد لاعبى القرص بزاوية قياسها ١٥٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسى.

الزوايا المتكافئة Equivalent angles

تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة (θ) فى الوضع القياسى لكل شكل. ماذا تلاحظ؟

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

فى الأشكال (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائى و ب.

شكل (١): الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى. شكل (٢): الزاويتان θ ، θ + ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان θ ، θ + ٢ × ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان θ ، –(٣٦٠° – θ) = θ – ٣٦٠° متكافئتان

د) زاوية ربعية؛ لأنها تكافئ الزاوية التي قياسها ٩٠°

فى مثال (٥) وضح لطلابك أن الإجابة مفتوحة لتعطى العديد من الزوايا المكافئة، والتى يكون الضلع النهائي لكل منها مشتركًا مع الزاوية المعطاة.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠١)

٧) أ) ٤٠٠°، –٣٢٠° ب) ٥١٠°، –٢١٠°
ج) ٢٣٥°، –٤٨٥° د) ١٢٠°، –٦٠٠°
هـ) ١٨٠°، –٥٤٠°

٨) جميع البدائل المعطاة فى السؤال تحقق الشرط: θ ± ٣٦٠°ن، حيث ن ∋ ص ما عدا رقم (جـ) لا يحقق ذلك الشرط.

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

١) أ) الأول ب) الرابع ج) الثانى
د) الثانى هـ) الأول

٢) أ) –٣١٧° ب) –١٤٦° ج) –٢٣٥°
د) –٢٧٠° هـ) –٤٨°

٣) أ) ٣٠٤° ب) ١٤٥° ج) ١٣٥°
د) ٢١٠° هـ) ٢٧٠°

ملاحظات على تمارين كراسة التدريبات:

فى مسألة رقم (١٠) إجابة كريم خطأ؛ لأنه استخدام الزاوية المكافئة على النحو: θ ± ١٨٠°ن، لكن إجابة زياد صحيحة؛ لأنه استخدم الزاوية المكافئة على النحو θ ± ٣٦٠°ن.

التقييم

أوجد أصغر زاوية بقياس موجب، ثم أوجد زاوية أخرى بقياس سالب تشترك مع الضلع النهائى لكل زاوية مما يأتى:

أ) ٤٦٠° ب) ١٢٥° ج) –٣٠°
د) ٤٢٠° هـ) ٦١٢° و) ٨١٥°

الإجابات

أ) ١٠٠°، –٢٦٠° ب) ٤٨٥°، –٢٣٥°
ج) ٣٣٠°، –٣٩٠° د) ٦٠°، –٣٠٠°
هـ) ١٠٨°، –٢٥٢° و) ٢٦٥°، –٩٥°

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى فإن جميع الزوايا التى قياساتها:

θ ± ١ × ٣٦٠° أو θ ± ٢ × ٣٦٠° أو θ ± ٣ × ٣٦٠° أو..... أو θ ± ن × ٣٦٠° حيث ن ∋ ص

يكون لها نفس الضلع النهائى، وتسمى **زوايا متكافئة**.

مثال

٥) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ) ١٢٠° ب) – ٢٣٠°

الحل

أ) زاوية بقياس موجب: ١٢٠° + ٣٦٠° = ٤٨٠° (بإضافة ٣٦٠°)
زاوية بقياس سالب: ١٢٠° – ٣٦٠° = –٢٤٠° (بطرح ٣٦٠°)

ب) زاوية بقياس موجب: –٢٣٠° + ٣٦٠° = ١٣٠° (بإضافة ٣٦٠°)
زاوية بقياس سالب: –٢٣٠° – ٣٦٠° = –٥٩٠° (بطرح ٣٦٠°)

فكر: هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

٧) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا الآتية:
أ) ٤٠° ب) ١٥٠° ج) – ١٢٥° د) –٢٤٠° هـ) –١٨٠°

٨) اكتشف الخطأ: جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° في الوضع القياسى ما عدا الإجابة:
أ) –٢٨٥° ب) –٦٤٥° ج) ٢٨٥° د) ٤٣٥°

تحقق من فهمك

١) عين الربع الذى تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتى:
أ) ٥٦° ب) ٣٢٥° ج) ٥٧٠° د) ١٦٦° هـ) ٣٩٠°

٢) عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى:
أ) ٤٣° ب) ٢١٤° ج) ١٢٥° د) ٩٠° هـ) ٣١٢°

٣) عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:
أ) –٥٦° ب) –٢١٥° ج) ٤٩٥° د) ٩٣٠° هـ) –٤٥٠°

---

٥) ضع كلًّا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى، موضحًا ذلك بالرسم:
أ) ٣٢° ب) ١٤٠° ج) – ٨٠° د) –١١٠° هـ) –٣١٥°

٦) عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:
أ) ٨٣° ب) ١٣٦° ج) ٩٠°
د) ٢٦٤° هـ) ٩٦٤° و) ١٠٧٠°

٧) عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:
أ) –١٨٣° ب) –٢١٧° ج) –٣١٥° د) –٥٧٠°

٨) فى الشكل المقابل: أيًا من الأزواج المرتبة الآتية تعبر عن زاوية موجهة فى وضعها القياسى؟ لماذا؟

أ) ($\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وى}$) ب) ($\overleftarrow{وز}$ ، $\overleftarrow{وجـ}$)
ج) ($\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$) د) ($\overleftarrow{وهـ}$ ، $\overleftarrow{وى}$)
هـ) ($\overleftarrow{وى}$ ، $\overleftarrow{وز}$) و) ($\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وز}$)

٩) يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى

١٠) اكتشف الخطأ: اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائى للزاوية (–١٣٥°)

إجابة كريم	إجابة زياد
أصغر زاوية بقياس موجب = –١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°	أصغر زاوية بقياس موجب = –١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°
أصغر زاوية بقياس سالب = –١٣٥° – ١٨٠° = –٣١٥°	أصغر زاوية بقياس سالب = –١٣٥° – ٣٦٠° = –٤٩٥°

أى الإجابتين صحيح ؟ فسر إجابتك.

٤ - ٢

القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

Degree Measure and Radian Measure of an Angle

خلفية

سبق أن درس الطالب الزاوية الموجهة ووضعها القياسى والزوايا المتكافئة. ويتناول هذا الدرس التعريف بوحدات القياس الدائرى وهى الزاوية النصف قطرية (الراديان)، ثم يتناول إيجاد طول قوس من دائرة معلوم طول نصف قطرها، وقياس الزاوية المركزية بالراديان لهذا القوس.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف القياس الدائرى للزاوية المركزية.
- يستنتج العلاقة بين القياسين الستينى والدائرى.
- يوجد طول قوس من دائرة معلوم طول نصف قطرها وزاويتها المركزية بالقياس الدائرى.

مفردات أساسية

قياس ستينى – قياس دائرى – زاوية نصف قطرية (راديان).

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

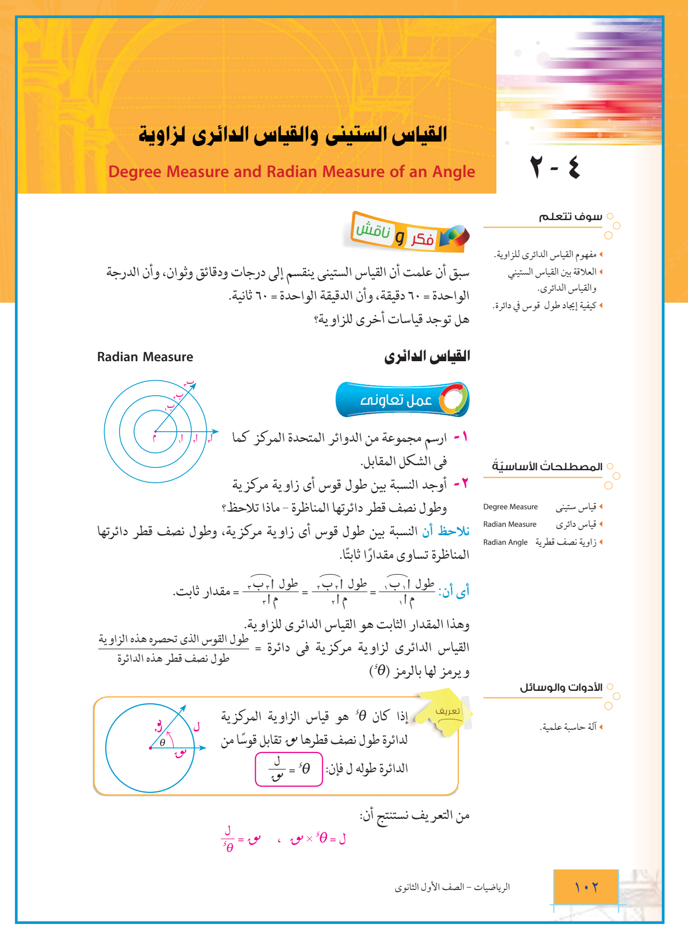
كتاب الطالب من صفحة ١٠٢ إلى صفحة ١٠٥ كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٢ إلى صفحة ٥٤ الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- ابدأ الدرس بأن توضح للطلاب مفهوم الدرجة وأجزائها كوحدة قياس الزاوية، وأن الزاوية القائمة = ٩٠°.



٤ - ٢

القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

Degree Measure and Radian Measure of an Angle

سوف تتعلم

- مفهوم القياس الدائرى للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائرى.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن علمت أن القياس الستينى ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = ٦٠ دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية.

هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

القياس الدائرى Radian Measure

عمل تعاونى

١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما فى الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة – ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوى مقدارًا ثابتًا.

أى أن: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{م أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{م أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{م أ_3}$ = مقدار ثابت.

وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية.

القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز لها بالرمز ($\theta^{ء}$)

تعريف

إذا كان $\theta^{ء}$ هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها نق تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن: $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

من التعريف نستنتج أن:

$ل = \theta^{ء} \times نق$ ، $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

١٠٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

(الدرجة = ٦٠ دقيقة، الدقيقة = ٦٠ ثانية) ثم اطلب إليهم استخدام الآلة الحاسبة لتحويل كسر الدرجة إلى دقائق وثوان، والعكس صحيح، أى تحويل الدقائق والثوانى إلى أجزاء من الدرجة.

عرض الدرس

تعلم: القياس الدائرى

عمل تعاونى

اطلب إلى طلابك عمل النشاط الموضح فى بداية صفحة (١٠٢) من كتاب الطالب مع متابعة أعمالهم، ثم أكد على تعريف القياس الدائرى للزاوية المركزية $\theta^{ء}$

إجابات تفكير ناقد صفحة (١٠٢)

نعم تزداد الزاوية المركزية بازدياد طول القوس المقابل لها فى الدائرة الواحدة.

لاحظ أن: $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$، نق ثابت فى الدائرة فيكون $\theta^{ء} \propto ل$

أي $\theta^{ء}$ تتناسب تناسبًا طرديًّا مع ل، ولكن إذا كانت عدد من الدوائر لها نفس المركز، فيكون قياس الزاوية ثابت عند أى دائرة، كما هو موضح فى عمل تعاونى.

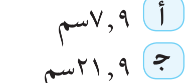
التعريف بالراديان: أعط طلابك نبذة عن الراديان وذلك كالآتى:

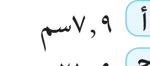
أول من استخدم "الراديان" هو الرياضى البريطانى روجز كوتش عام ١٧١٤م، كوحدة للقياس الدائرى، ويستخدم فى العديد من القياسات، كما أن استخدامه فى الفيزياء أمر شائع لقياس الزوايا مثل السرعة الزاوية والتسارع الزاوى،.......

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٣)

(١) أ ٧,٩سم   ب ٨,٤سم





ج ٢١,٩سم

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل ص (١٠٤)

(٢) وضح لطلابك أهمية هذا التمرين، حيث يتناول الزوايا الخاصة (٣٠°، ٤٥°، ٦٠°) التى يستخدمها الطالب بكثرة للتحويل من راديان إلى درجات أو العكس، حيث تتكرر فى الأرباع الأربعة.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٤)

(٣) أ ٤٠َ ٦ ٢٦ً°   ب ٩٠ ٤٠َ ٢٤ً°

ج ١١٧ ٢٧َ ٢٣ً°   د ٢٢٩ ٥٠َ ٢٢ً°

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

(١) الزاوية قياسها ٤٥° وتقع فى الربع الأول.

وحدة قياس الزواية فى القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز (١ء) ويقرأ واحد دائرى (راديان).

ص، نق، θ، س، سَ، صَ، θ = ١ راديان

تعريف

الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

تفكير ناقد: هل القياس الدائرى لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسِّر إجابتك.

مثال

(٤) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد لأقرب رقمين عشرين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله يساوى $\frac{٥\pi}{١٢}$

الحل

نستخدم صيغة طول القوس: $ل = \theta^{ء} \times نق$

بالتعويض عن نق = ٨ سم ، $\theta^{ء} = \frac{٥\pi}{١٢}$ فيكون: $ل = \frac{٥\pi}{١٢} \times ٨$ ∴ ل ≃ ١٠,٤٧سم

حاول أن تحل

(١) أوجد طول القوس الذى يحصر الزاوية المعلومة فى كل من الدوائر الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

أ ٥ سم   ب ٨ سم، $\frac{\pi}{٣}$ ج ٦ سم، $\frac{٧\pi}{٦}$

العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية:

Relation between degree measure and radian measure of an angle

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوى قياس قوسها.

أى أن: الزاوية المركزية التى قياسها الستينى ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢ π نق

أضف إلى معلوماتك

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة.

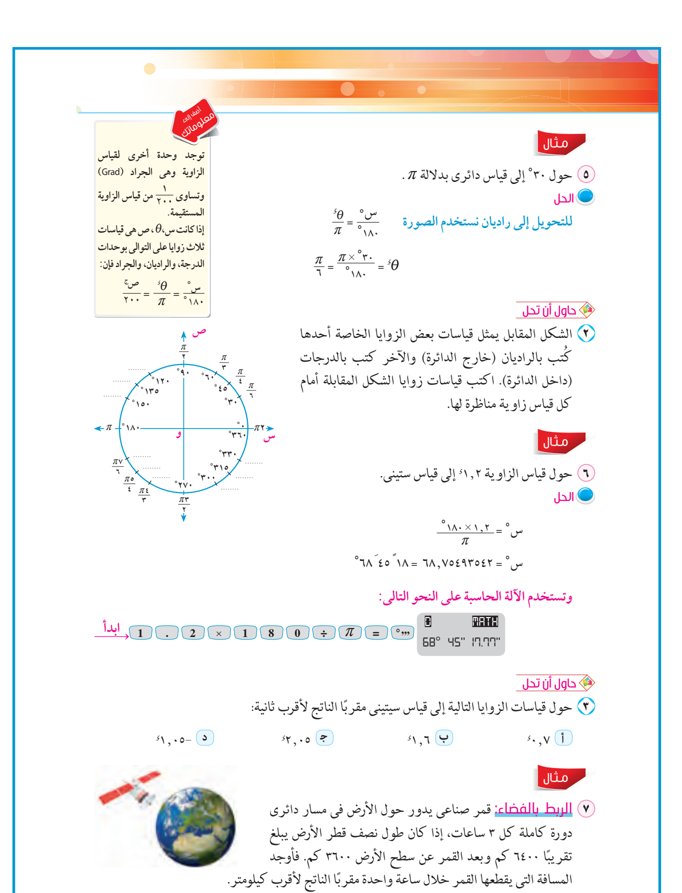
وفى دائرة الوحدة

فإن: ٢π (راديان) بالتقدير الدائرى يكافئ ٣٦٠° بالتقدير الستينى.

أى أن: π (راديان) يكافئ ١٨٠°   ١ء (راديان) = $\frac{١٨٠°}{\pi}$ ≃ ٤٥ً ١٧َ ٥٧°

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائرى $\theta^{ء}$ وقياسها الستينى سْ فإن:

$$\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$$



مثال

(٥) حول ٣٠° إلى قياس دائرى بدلالة π .

الحل

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة $\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$

$\theta^{ء} = \frac{٣٠° \times \pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٦}$

أضف إلى معلوماتك

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grad) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.

إذا كانت س، θ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة، والراديان، والجراد فإن:

$\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{ص^{ج}}{٢٠٠}$

حاول أن تحل

(٢) الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة أحدها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كتب بالدرجات (داخل الدائرة). اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.

مثال

(٦) حول قياس الزاوية ١,٢ء إلى قياس ستينى.

الحل

$س° = \frac{١,٢ \times ١٨٠°}{\pi}$

س° = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢ = ١٨ً ٤٥َ ٦٨°

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ 1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = °'''

MATH 68° 45" 17.77"

حاول أن تحل

(٣) حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس سيتينى مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ ٠,٧ء   ب ١,٦ء   ج ٢,٠٥ء   د -١,٠٥ء

مثال

(٧) **الربط بالفضاء:** قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر.

١٠٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التقييم

١- كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق ليدور زاوية قياسها $٢,٤\pi$؟

٢- فى الشكل المقابل إذا كانت مساحة سطح المثلث أ م ب القائم الزاوية فى م تساوى $٣٢\frac{١}{٤}$ سم^{٢} فأوجد محيط الجزء المظلل لأقرب رقمين عشريين.

ملاحظات على تمارين كتاب الأنشطة والتدريبات:

(١٩) توجد قياس الزاوية المركزية للقوس = $\frac{٤\pi}{٩}$

طول القوس $\overset{\frown}{أ جـ}$ = $\frac{٤\pi}{٩} \times ١٢ = ١٦\pi$ سم

(٢٠) ١٠ دقائق تمثل ٦٠°

طول القوس = $\frac{٦٠\pi}{١٨٠} \times ٦ = ٢\pi$ سم

(٢١) الزاوية المركزية = $\frac{٢\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

طول القوس = $\frac{\pi}{٣} \times ٩٠٠٠ = ٣٠٠٠\pi$

(٢٢) نق = $\frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ سم

ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) الأصغر = ١٢٠°

ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) الأكبر = ٢٤٠°

ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) الأكبر = $\frac{٢٤٠° \times \pi}{١٨٠°} \times ٦ \simeq ٢٥$ سم

(٢٣) أ قياس الزاوية ١٥° × ٤ = ٦٠°

قياس الزاوية بالراديان = $\frac{٦٠\pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٣}$

ب الزاوية بالدرجات = $\frac{٢ \times ١٨٠°}{٣} = ١٢٠°$

الزمن = $\frac{١٢٠°}{١٥°}$ = ٨ ساعات

جـ الزاوية بالدرجات بعد ١٠ ساعات

= ١٥° × ١٠ = ١٥٠°

ل = $\frac{١٥٠° \times \pi}{١٨٠°} \times ٢٤ = ٢٠\pi$ سم

(٢٤) م = ظا $\frac{\pi}{٣} = \sqrt{٣}$

معادلة المستقيم: ص = م س + جـ

ص = $\sqrt{٣}$ س

الحل

يبين الشكل المقابل المسار الدائرى لحركة القمر:

∵ طول نصف قطر دائرة مسار القمر م أ = م جـ + جـ أ

∴ م أ = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∵ القمر يقطع المسار الدائرى (دورة كاملة) فى ٣ ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية = ٢π

∴ القمر يقطع قوسًا طوله $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة فى الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية = $\frac{٢\pi}{٣}$

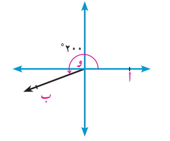
نستخدم صيغة طول القوس: ل = $\theta^{ء} \times$ نق

بالتعويض عن نق = ١٠٠٠٠ كم، $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٣}$: ل = $\frac{٢\pi}{٣} \times ١٠٠٠٠$

ل ≃ ٢٠٩٤٤ كم

(٨) ألعاب رياضية: يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°. ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى.

الحل



ارسم محورين لإنشاء مستوى إحداثى متعامد ومتقاطعين في النقطة و.

بفرض أن اللاعب يدور بزاوية موجهة أو ب حيث:

∠ (أ و ب) = ($\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$) فيكون ق (∠ أ و ب) = ٢٠٠°.

∵ ١٨٠° < ٢٠٠° < ٢٧٠°

∴ الضلع النهائى للزاوية يقع في الربع الثالث.

٢٠٠° = $\frac{\pi \times ٢٠٠}{١٨٠} \simeq ٣,٤٩^{ء}$

حاول أن تحل

(٤) الربط بالألعاب الرياضية: لاعب اسكواش تحرك فى مسار على شكل قوس طول نصف قطر دائرته ١,٤ متر وزاوية دوران اللاعب ٨٠° أوجد لأقرب جزء من عشرة طول هذا القوس.

تحقق من فهمك

(١) الصناعة: يدور قرص آلة بزاوية قياسها – ٣١٥° ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى.

(١٩) الربط بالهندسة: $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة طوله ٢٤ سم ، رسم الوتر $\overline{أ جـ}$ بحيث كان ق(∠ب أجـ) = ٥٠° أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{أ جـ}$ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

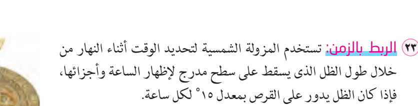
(٢٠) مسافات: كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

(٢١) فلك: قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر فى الساعة.

(٢٢) الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماسان للدائرة م، ق (∠ جـ أ ب) = ٦٠°، أ ب = ١٢ سم.

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{ب جـ}$.



(٢٣) الربط بالزمن: تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل ١٥° لكل ساعة.

أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{٢\pi}{٣}$ راديان؟

جـ مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

(٢٤) تفكير ناقد: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ فى الوضع القياسى لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

٤ - ٣

الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب النسب المثلثية للزاوية الحادة وفى هذا الدرس سوف يدرس الدوال المثلثية ومقلوبات هذه الدوال ثم يستخدم الزاوية المنتسبة لإيجاد قيمة دالة مثلثية.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف على دائرة الوحدة
- يتعرف الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ.
- يتعرف مقلوبات الدوال المثلثية للزاوية θ.
- يتعرف إشارات الدوال المثلثية.
- يتعرف الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.

مفردات أساسية

دالة مثلثية – زاوية ربعية – جيب – جيب تمام – ظل – قاطع تمام – قاطع – ظل تمام.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٠٦ إلى صفحة ١١١

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٥ إلى صفحة ٥٦

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- ذكر طلابك بالنسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.

---

٤ - ٣ الدوال المثلثية
Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

وفى △أ ب جـ القائم الزاوية في ب نجد:

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

١- في الشكل المقابل عبر عن جا جـ بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تتساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟

لاحظ أن:

المثلثات ب أ جـ ، هـ و جـ ، ى ب جـ متشابهه (لماذا)؟

ومن التشابه يكون: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\text{هـ و}}{\text{و جـ}}$ = $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب جـ}}$ = جا جـ لماذا؟

أى أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها نق سم

حيث: ق (∠ى و جـ) = θ

جا θ = $\frac{\text{جـ ى}}{\text{نق}}$

وعندما يزداد ق (∠ى و جـ) إلى α

فإن جا α = $\frac{\text{م ل}}{\text{نق}}$

أى أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها، وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

١٠٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

عرض الدرس

اعرض على طلابك الفرق بين النسبة المثلثية والدوال المثلثية كالآتي:

النسبة المثلثية: هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

الدالة المثلثية: فتعرف من خلال النسبة المثلثية، فإذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة فى مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور، وفى بند "لاحظ أن" : يبين الشكل المرسوم مفهوم الدالة المثلثية على أنها علاقة. بين الزاوية θ كمتغير مستقل ، حاθ كمتغير تابع له..

إرشادات:

(١) وضح للطلاب أنه يمكن أيضًا كتابة مقلوبات الدوال المثلثية كالآتي:

$$\text{جا}\theta = \frac{١}{\text{قتا}\theta} ،\ \text{جتا}\theta = \frac{١}{\text{قا}\theta} ،\ \text{ظا}\theta = \frac{١}{\text{ظتا}\theta}$$

وأنه بوجه عام تكون الدالة المثلثية × مقلوب هذه الدالة = ١

(٢) إذا عُرفت الدوال المثلثية عن طريق دائرة الوحدة، حيث يسمح بتحديد قيمة الزاوية لتشمل أى عدد حقيقى وعادة ما تسمى الدوال السابقة فى هذه الحالة بالدوال الدائرية إذا كان رأس الزاوية هى نقطة الأصل ويقع ضلعها الابتدائى على الجزء الموجب من محور السينات، ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة عند النقطة (س، ص) فإننا نعرف الدوال الدائرية على النحو التالى:

$$\text{جتا}\,\theta = \text{س} ،\ \text{حا}\theta = \text{ص} ،\ \text{ظا}\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} ،\ \text{س} \neq ٠$$

$$\text{قا}\theta = \frac{١}{\text{س}} ،\ \text{س} \neq ٠ ،\ \text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{ص}} ،\ \text{ص} \neq ٠$$

$$\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}} ،\ \text{ص} \neq ٠$$

ولابد من التأكيد على هذه الشروط بحيث تكون هذه الدوال معرفة

تفكير ناقد:

□ اسأل طلابك: هل بالضرورة أن تكون قاθ >١، قتاθ >١؟ فسر إجابتك.

إجابة تفكير ناقد

مدى كل من جاθ ، جتاθ هو [-١، ١]

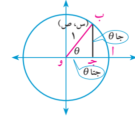
مدى كل من قتاθ ، قاθ هو ح -]-١، ١[

دائرة الوحدة — The unit circle

فى أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١، ٠)، ب (-١، ٠)، وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠، ١)، ى (٠، -١).

★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:
س ∈ [-١، ١] ، ص ∈ [-١، ١].
حيث $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ نظرية فيثاغورث



الدوال المثلثية الأساسية للزاوية — The basic trigonometric functions of an angle

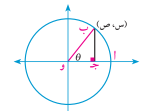
لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية:

١- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثى السينى للنقطة ب
أى أن: جتا θ = س

٢- جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب
أى أن: جا θ = ص

٣- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

أى أن: ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠ ، ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ حيث جتا θ ≠ ٠



لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ، جا θ)

إذا كانت النقطة جـ$(\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهه قياسها θ مع دائرة الوحدة

فإن: جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$

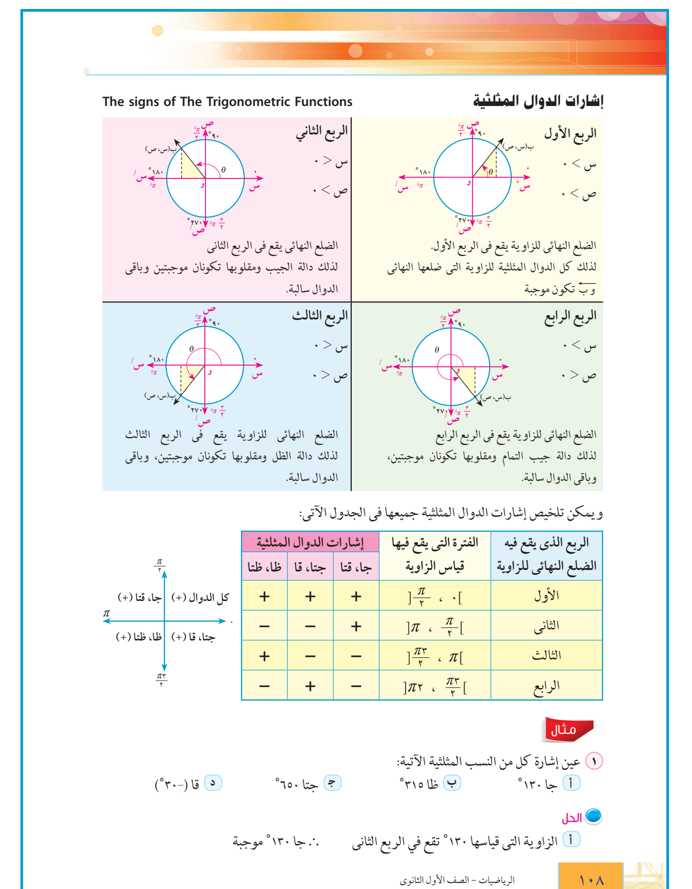
مقلوبات الدوال الأساسية — The reciprocals of the basic trigonmetric functions

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص) وقياسها θ توجد الدوال الآتية:

١- قاطع الزاوية θ: قا θ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ حيث س ≠ ٠

٢- قاطع تمام الزاوية θ: قتا θ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ حيث ص ≠ ٠

٣- ظل تمام الزاوية θ: ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث ص ≠ ٠



إشارات الدوال المثلثية — The signs of The Trigonometric Functions

الربع الأول
س > ٠
ص > ٠
الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الأول.
لذلك كل الدوال المثلثية للزاوية التى ضلعها النهائى و ب تكون موجبة

الربع الثاني
س < ٠
ص > ٠
الضلع النهائى يقع فى الربع الثانى
لذلك دالة الجيب ومقلوبها تكونان موجبتين وباقى الدوال سالبة.

الربع الرابع
س > ٠
ص < ٠
الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الرابع
لذلك دالة جيب التمام ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

الربع الثالث
س < ٠
ص < ٠
الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الثالث
لذلك دالة الظل ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها فى الجدول الآتى:

الربع الذى يقع فيه الضلع النهائى للزاوية	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية: جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	$]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$	+	−	−
الثالث	$]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$	−	+	−

مثال

(١) عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:
أ جا ١٣٠° ب ظا ٣١٥° جـ جتا ٦٥٠° د قا (-٣٠°)

الحل

أ الزاوية التى قياسها ١٣٠° تقع في الربع الثانى ∴ جا ١٣٠° موجبة

ويمكن تمثيل ذلك على خط الأعداد كالآتي:

الدالة	قا θ، قتا θ	جا θ، جتا θ	قا θ، قتا θ
	∞ + + + + ١	+ + ١- − −	− − − ∞-

التعلم التعاونى

١ قسم طلاب فصلك إلى أربع مجموعات مختلفة وأعطِ كل مجموعة رسم يوضح الوضع القياسى للزاوية الموجهة فى أحد الأرباع الأربعة، واطلب إليهم كتابة إشارة الدوال المثلثية فى هذا الربع، ثم بدِّل هذه الرسومات بين المجاميع حتى تتأكد من إتقان طلابك لمهارة تحديد إشارات الدوال المثلثية للزاوية الموجهة.

٢ أعطِ أمثلة عددية لدوال مثلثية لزوايا مختلفة واطلب إليهم كتابة إشارة كل دالة مثلثية .

٣ وضح لطلابك أنه يمكن الاستعانة بالآلة الحاسبة لإيجاد إشارة الدالة المثلثية للتأكد من صحة الإجابات.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

١ أ سالبة. ب موجبة.

ج سالبة. د سالبة.

٣ جتاθ = $\frac{٣-}{٥}$ ، ظاθ = $\frac{٤-}{٣}$

الدالة المثلثية	أ	ب	جـ
جاθ	$\frac{١٢}{١٣}$	$-\frac{٤}{٥}$	$\frac{٥}{١٣}$
جتاθ	$\frac{٥}{١٣}$	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{١٢-}{١٣}$
ظاθ	$\frac{١٢}{٥}$	$-\frac{٤}{٣}$	$-\frac{٥}{١٢}$
قتاθ	$\frac{١٣}{١٢}$	$-\frac{٥}{٤}$	$\frac{١٣}{٥}$
قاθ	$\frac{١٣}{٥}$	$\frac{٥}{٣}$	$-\frac{١٢}{٥}$
ظتاθ	$\frac{٥}{١٢}$	$-\frac{٣}{٤}$	$\frac{٥}{١٣}$

إرشادات :

- أكد على طلابك بأن النقطة (س، ص) تعنى أن: س = جتا θ، ص = جا θ، $\frac{ص}{س}$ = ظا θ
- اطلب إلى طلابك إيجاد الدوال المثلثية الأساسية ومقلوبات هذه الدوال للنقاط $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، $أ_٤$ والعلاقة بينها فى الشكل المرسوم.

ب الزاوية التى قياسها ٣١٥° تقع في الربع الرابع ∴ ظا ٣١٥° سالبة

ج الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تكافىء زاوية قياسها ٦٥٠° − ٣٦٠° = ٢٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تقع في الربع الرابع ∴ جتا ٦٥٠° موجبة.

د الزاوية التى قياسها (−٣٠°) تكافئ زاوية قياسها − ٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

الزاوية التى قياسها (−٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ قا (−٣٠°) موجبة.

حاول أن تحل

١ عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جتا ٢١٠° ب جا ٧٤٠° ج ظا − ٣٠٠° د جا ١٢٣٠°

مثال

٢ إذا كانت ∠ أ و ب فى وضعها القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب وقياسها θ.
أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هى:

أ (٠، −١) ب ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ص) ج (−س، س)

حيث س > ٠ ، ص > ٠

الحل

أ جتا θ = ٠ ، جا θ = −١ ، ظا θ = $\frac{١-}{٠}$ (غير معرف)

ب س٢ + ص٢ = ١ (دائرة الوحدة) ، بالتعويض عن س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

($\frac{١}{\sqrt{٢}}$)٢ + ص٢ = ١ فيكون ص٢ = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ ، ص = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ < ٠ (مرفوض)

∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ١

ج (−س)٢ + (س)٢ = ١ ∴ ٢س٢ = ١ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لأن س > ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ويكون: جتا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = −١

٣ إذا كانت ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° وكان جا θ = − $\frac{٥}{١٣}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

الحل

نفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع
وأن إحداثيى النقطة ب هما (س، ص)

∵ ص = جا θ = − $\frac{٥}{١٣}$ ، س = جتا θ حيث جتا θ > ٠

∵ س٢ + ص٢ = ١ ∴ جتا٢ θ + ($\frac{٥-}{١٣}$)٢ = ١

∴ جتا٢ θ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ جتا٢ θ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ أو جتا θ = − $\frac{١٢}{١٣}$

جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ (لماذا)؟ ظا θ = − $\frac{١٢}{٥}$

حاول أن تحل

٢ إذا كانت ٩٠° < θ < ١٨٠°، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد جتا θ، ظا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسى في دائرة الوحدة.

مثال

٤ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ و المرسومة فى الوضع القياسى، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (− $\frac{٣}{٥}$، $\frac{٤}{٥}$). فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ.

الحل

جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{٣-}{٥}$ = − $\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣-}$ = − $\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣-}$ = − $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣-}{٤}$ = − $\frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

٣ أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب حيث:

أ ب ($\frac{٥}{١٣}$، $\frac{١٢}{١٣}$) ب ب ($\frac{٣}{٥}$، − $\frac{٤}{٥}$) ج ب (− $\frac{١٢}{١٣}$، $\frac{٥}{١٣}$)

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة The trigonometric functions of some special angles

في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محورى الإحداثيات في النقاط $أ_١$(١، ٠)، $أ_٢$(٠، ١)، $أ_٣$(−١، ٠)، $أ_٤$(٠، −١).
وكانت θ قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسى، والذى يقطع ضلعها النهائى و ب دائرة الوحدة في ب.

أولًا: إذا كانت θ = ٠° أو θ = ٣٦٠° فإن: ب(١، ٠)

ويكون: جتا ٠° = جتا ٣٦٠° = ١ ، جا ٠° = جتا ٣٦٠° = صفر،
ظا ٠° = ظا ٣٦٠° = صفر

ثانيًا: إذا كانت θ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ فإن: ب(٠، ١)

جتا ٩٠° = صفر ، جا ٩٠° = ١ ، ظا = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

ثالثًا: إذا كانت θ = ١٨٠° = π فإن: ب(−١، ٠)

جتا ١٨٠° = −١ ، جا ١٨٠° = صفر ، ظا ١٨٠° = صفر



- ذكر طلابك بأن:

$\frac{١}{١} = ١$ ، $\frac{٠}{١} = ٠$ ، $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

- اربط دائمًا القياس الستينى، مع القياس الدائرى للزوايا فمثلاً: ٠، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠° ، ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$

يمكنك تدريب طلابك بإعطائهم بعض الزوايا المكافئة.

- ذكر طلابك بالعلاقة بين أضلاع المثلث الثلاثينى الستينى، ثم اطلب إليهم إيجاد طولى ضلعى القائمة باعتبار طول الوتر يساوى وحدة الطول.
- اطلب إلى طلابك إيجاد الزوج المرتب (س ، ص) عندما تكون قياس الزاوية الموجهة ٣٠° وعندما يكون قياسها ٦٠°.
- اطلب إلى طلابك إيجاد طول ضلع القائمة فى المثلث القائم الزاوية والمتساوى الساقين عندما يكون طول الوتر مساويًا للوحدة، ثم وضح إليهم بأن النقطة ب (س، ص) المقابلة للزاوية الموجهة ٤٥° تصبح ب ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)
- وضح لطلابك التعبيرات المتكافئة الآتية :

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣}}$

- أعط أمثلة بسيطة لإيجاد قيمة مقدار على سبيل المثال:

إذا كان الوضع النهائى للزاوية θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{١}{٢}$، أ$\sqrt{٣}$) حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$.

أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة قا² θ − ظا² θ

تدريب إضافى:

أوجد قيمة:

أ جا ٣٠° + جتا ٦٠° ب ظا ٠° + ظا ٤٥° + ظا ١٨٠°

ج جا ٣٠° جتا ٤٥° − جتا ٣٠° جا ٤٥°

د ظا² ٦٠° − قا² ٦٠° + جا ٩٠°

- وضح للطلاب بأن :

ظا² ٦٠° = ظا ٦٠° × ظا ٦٠° = (ظا ٦٠°)²

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٤ المقدار = ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ − ١ × ٢ + (−١) $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

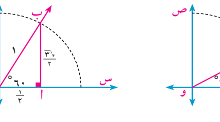
= ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$ − ٢ − $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{١١}{٨}$

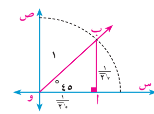
رابعًا: إذا كانت θ = ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$ **فإن:** ب(٠، −١)

جتا ٢٧٠° = ٠ ، جا ٢٧٠° = −١ ، ظا ٢٧٠° = $\frac{-١}{صفر}$ (غير معرف)

حاول أن تحل

٤ في الأشكال التالية حدد إحداثيي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°





مثال

٥ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{٣}$

الحل

تعلم أن جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ (١)

∵ $\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥° ، جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الطرف الأيسر = جا² $\frac{\pi}{٤}$ = جا² ٤٥° = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة: ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

٦ تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التي قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هل من الممكن أن يكون θ = ٢٤٠°؟ وضح ذلك.

تحقق من فهمك

أثبت صحة كلٍّ من المتساويات التالية:

أ ١ − ٢جا² ٩٠° = جتا ١٨٠° ب جتا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا² $\frac{\pi}{٤}$ − جا² $\frac{\pi}{٤}$

٥ أ كل طرف = −١ ب كل طرف = صفر.

تفكير ناقد:

ظا θ < ٠ ، قتا θ > ٠ ، θ تقع فى الربع الثانى

و (θ) = $\frac{١٣٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣\pi}{٤}$

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ الطرف الأيمن = ١ − ٢ جا² ٩٠° = ١ − ٢ × ١ = −١

الطرف الأيسر = جتا ١٨٠° = −١

ب جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠، جتا² $\frac{\pi}{٤}$ − جا² $\frac{\pi}{٤}$ = ٠

التقييم

أوجد قيمة كل مماياتى:

١ ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° [الجواب: $\frac{٤}{٣}$]

٢ ٣ ظا ٤٥° − ٢ جا ٦٠° جتا ٣٠° [الجواب: $\frac{٣}{٢}$]



الزاويا المنتسبة

Related Angles

خلفية

سبق أن درس الطالب الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها للزاوية المتجهة θ، وأوجد قيم هذه الدوال لبعض الزوايا الخاصة، كما بحث إشارة هذه الدوال فى الأرباع الأربعة، وسوف يدرس فى هذا الدرس الدول المثلثية للزوايا $(\theta \pm °١٨٠)$، $(\theta \pm °٣٦٠)$، $(\theta \pm °٩٠)$، $(\theta \pm °٢٧٠)$

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $\theta \pm °١٨٠$.
- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٣٦٠ - \theta$.
- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٩٠ \pm \theta$.
- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٢٧٠ \pm \theta$.
- يوجد الحل العام لبعض المعادلات المثلثة.

مفردات أساسية

زاوية منتسبة – دالة مثلثية .

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١١٢ إلى صفحة ١١٨

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٧ إلى صفحة ٥٩

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- ذكر الطلاب بخواص الانعكاس فى المستوى الإحداثى حول محور الصادات، وحول محور السينات وبالنسبة لنقطة الأصل.

٤ - ٤

الزاويا المنتسبة

Related Angles

سوف تتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°١٨٠ \pm \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٣٦٠ - \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٩٠ \pm \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $°٢٧٠ \pm \theta$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة:
  - جا α = جتا β
  - قا α = قتا β
  - ظا α = ظتا β

المصطلحات الأساسية

- زاويتان منتسبتان Related Angles

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه . يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ و ب فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص). قياسها θ حيث $°٠ < \theta < °٩٠$

عيّن النقطة ب/ صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.

ما قياس ∠ أ و ب، ∠ أ و ب/ فى الوضع القياسى؟

١ - الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسهما θ ، $(°١٨٠ - \theta)$

من الشكل المقابل ب/ (س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول محور الصادات

فيكون س/ = −س ، ص/ = ص

لذلك فإن:

جا $(°١٨٠ - \theta)$ = جا θ ، قتا $(°١٨٠ - \theta)$ = قتا θ

جتا $(°١٨٠ - \theta)$ = − جتا θ ، قا $(°١٨٠ - \theta)$ = − قا θ

ظا $(°١٨٠ - \theta)$ = − ظا θ ، ظتا $(°١٨٠ - \theta)$ = − ظتا θ

فمثلًا: جتا °١٢٠ = جتا (°١٨٠ − °٦٠) = − جتا °٦٠ = $-\frac{1}{2}$

جا °١٣٥ = جا (°١٨٠ − °٤٥) = جا °٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

حاول أن تحل

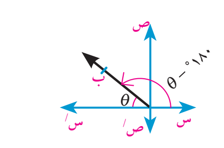
١ أوجد ظا °١٣٥ ، جا °١٢٠ ، جتا °١٥٠

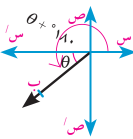
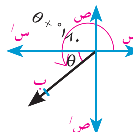
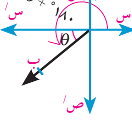
لاحظ أن: $\theta + (°١٨٠ - \theta) = °١٨٠$

يقال إن الزاويتين θ ، $°١٨٠ - \theta$ زاويتان منتسبتان.

تعريف: الزاويتان المنتسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيحًا من القوائم.

- يمكن توضيح مفهوم الزاوية المنتسبة من خلال الأشكال التالية :


مجموع الزاويتين المنتسبتين قائمتين




الفرق بين الزاويتين المنتسبتين قائمتان

مجموع الزاويتين المنتسبتين أربع قوائم

توسيع:

- تسمى الزاوية θ أحيانا بالزاوية المرجعية للزاوية $١٨٠° \pm \theta$ أو $٣٦٠° \pm \theta$ وتعرف الزاوية المرجعية بأنها الزاوية الحادة المحصورة بين محور السينات والشعاع النهائى للزاوية المتجهة فى الوضع القياسى.
- درب طلابك بإعطائهم قياسات زوايا مختلفة واطلب إليهم كتابة الزاوية المنتسبة.

تدريب إضافى:

أوجد الزاوية المنتسبة لكل من الزوايا الآتية :

أ ١٣٠° ب ٢١٠° جـ ٣١٥°

د $\frac{١١\pi}{٦}$  هـ $\frac{١٣\pi}{٦}$ و $\frac{-٢\pi}{٣}$

عرض الدرس

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحتى (١١٢)، (١١٣)

(١) ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١

جا ١٢٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ١٥٠ = جتا (١٨٠ − ٣٠) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) جا ٢٢٥° = جا (١٨٠° + ٤٥°) = − جا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠ + ٣٠) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

قا ٦٠٠° = قا (٣٦٠° + ٢٤٠°)

قا ٢٤٠° = قا (١٨٠° + ٦٠) = − قا ٦٠ = −٢

ظتا ٢٢٥° = ظتا (١٨٠° + ٤٥°) = ظتا ٤٥° = ١

(٣) جا ٣١٥° = جا (٣٦٠° − ٤٥°) = − جا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

قتا ٣١٥° = $-\sqrt{٢}$

ظا ٣٣٠° = ظا (٣٦٠° − ٣٠°) = − ظا ٣٠° = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

ظا ٣٠٠° = ظا (٣٦٠° − ٦٠°) = − ظا ٦٠° = $-\sqrt{٣}$

٢- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(١٨٠° + \theta)$

في الشكل المقابل نجد:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و فيكون س/ = −س، ص/ = −ص

لذلك فإن:

جا $(١٨٠° + \theta)$ = − جا θ	قتا $(١٨٠° + \theta)$ = − قتا θ
جتا $(١٨٠° + \theta)$ = − جتا θ	قا $(١٨٠° + \theta)$ = − قا θ
ظا $(١٨٠° + \theta)$ = ظا θ	ظتا $(١٨٠° + \theta)$ = ظتا θ

فمثلًا:

جا ٢١٠° = جا (١٨٠° + ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٢٢٥° = جتا (١٨٠° + ٤٥°) = − جتا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد جا ٢٢٥° ، جتا ٢١٠° ، قا ٦٠٠° ، ظتا ٢٢٥°.

٣- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(٣٦٠° - \theta)$

في الشكل المقابل:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول محور السينات فيكون س/ = س ، ص/ = −ص

لذلك فإن:

جا $(٣٦٠° - \theta)$ = − جا θ	قتا $(٣٦٠° - \theta)$ = − قتا θ
جتا $(٣٦٠° - \theta)$ = جتا θ	قا $(٣٦٠° - \theta)$ = قا θ
ظا $(٣٦٠° - \theta)$ = − ظا θ	ظتا $(٣٦٠° - \theta)$ = − ظتا θ

فمثلًا:

جا ٣٣٠° = جا (٣٦٠° − ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٣١٥° = جتا (٣٦٠° − ٤٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

لاحظ أن
الدوال المثلثية للزاوية $(-\theta)$ هى نفسها الدوال المثلثية للزاوية $(٣٦٠° - \theta)$

حاول أن تحل

(٣) أوجد: جا ٣١٥° ، قتا ٣١٥° ، ظا ٣٣٠° ، ظا ٣٠٠°

تفكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (−٤٥°) ، جتا (−٦٠°) ، ظا(−٣٠°) ، جا ٦٩٠°.

إجابات تفكير ناقد صفحة (١١٥)

جا (٣٦٠° − ٤٥°) = − جا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا (٣٦٠° − ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا (٣٦٠° − ٣٠°) = − ظا ٣٠ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جا ٦٩٠° = جا (٣٦٠° + ٣٣٠°) = جا ٣٣٠°

جا ٣٣٠° = جا (٣٦٠° − ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

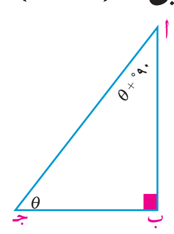
إجابة حاول أن تحل صفحة (١١٤)

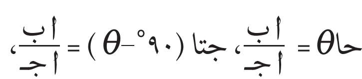
أوجد كل دالة مثلثية على حدة ثم أوجد قيمة المقدار فى بند حاول أن تحل (٤):

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $(٩٠° - \theta)$

يمكنك أن تبدأ الدرس كالآتى:

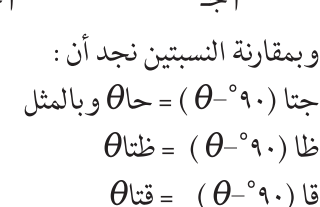
من الشكل المقابل نجد أن :





حا θ = $\frac{أب}{أجـ}$ ، جتا $(٩٠° - \theta)$ = $\frac{أب}{أجـ}$ ،

وبمقارنة النسبتين نجد أن :



جتا $(٩٠° - \theta)$ = حا θ وبالمثل

ظا $(٩٠° - \theta)$ = ظتا θ

قا $(٩٠° - \theta)$ = قتا θ

مثال

① بدون استخدام الآله الحاسبة أوجد قيمة المقدار

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا (−٣٠٠°) = جتا (−٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٩٣٠° = جتا (٩٣٠° − ٢ × ٣٦٠°) = جتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

وتكون جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = −جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظتا ٢٤٠° = ظتا (١٨٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{ظا ٦٠°}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

④ أثبت أن جا ٦٠٠° جتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°) = −١

٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (٩٠° − θ)

يبين الشكل المجاور جزءًا من دائرة مركزها و.

الزاوية التى قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها نق.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و جـ ب/:

نجد أن: س/ = ص ، ص/ = س

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° − θ)

جا (٩٠° − θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° − θ) = قا θ

جتا (٩٠° − θ) = جا θ ، قا (٩٠° − θ) = قتا θ

ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٩٠° − θ) = ظا θ



مثال

① إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

فأوجد الدوال المثلثية: جا (٩٠° − θ) ، ظتا (٩٠° − θ)

١١٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

قتا (٩٠° − θ) = قا θ

ظتا (٩٠° − θ) = ظا θ

- اطلب إلى طلابك كتابة باقى النسب مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة ١١٥

جتا (٩٠° − θ) = جا θ = $\frac{٤}{٥}$

قتا (٩٠° − θ) = قا θ = $\frac{٥}{٣}$

إجابات حاول أن تحل صفحة ١١٥

جا (٩٠° + θ) = جتا θ = $\frac{١}{٣}$

قا (٩٠° + θ) = −قتا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ = $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

تدريبات إضافية

أوجد إحدى قيم زاوية θ الحادة التى تحقق كلًّا ممايأتى:

(١) قتا (θ + ٢٥°) = قا (٢θ − ١٠°)

(٢) ظتا (θ − ٣٠°) = ظا (٩٠°+θ)

(٣) جتا θ = جا θ

(٤) جا (θ + ٢٠°) = جتا (٣ θ+ ٣٠°)

الإجابات:

(١) ٢٥° **(٢)** ١٥° **(٣)** ٤٥° **(٤)** ١٠°

تفكير ناقد:

أوجد أصغر قياس لزاوية موجبة تحقق المعادلتين:

٢ جا θ+ $\sqrt{٣}$ = ٠ ، ظاθ − $\sqrt{٣}$ = ٠

- وضح للطلاب أن:

جاθ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ < ٠ ، ظاθ = $\sqrt{٣}$ > ٠

لذلك فإن قياس ∠ θ تقع فى الربع الثالث

و ق(∠ θ)= ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

- ناقش مع طلابك العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٢٧٠° −θ) مستعينًا بما ورد فى صفحة (١١٦) من كتاب الطالب.

الحل

∵ جا (٩٠° − θ) = جتا θ ∴ جا (٩٠° − θ) = $\frac{٣}{٥}$

∵ ظتا (٩٠° − θ) = ظا θ ∴ ظتا (٩٠° − θ) = $\frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق أوجد جتا (٩٠° − θ) ، قتا (٩٠° − θ)

٥- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (٩٠° + θ)

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

نجد أن ص/ = س ، س/ = −ص

ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° + θ) كالآتى:

جا (٩٠° + θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° + θ) = قا θ

جتا (٩٠° + θ) = −جا θ ، قا (٩٠° + θ) = −قتا θ

ظا (٩٠° + θ) = −ظتا θ ، ظتا (٩٠° + θ) = −ظا θ

مثال

(٢) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\frac{١}{٣}$، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$) أوجد الدوال المثلثية ظا (٩٠° + θ) ، قتا (٩٠° + θ)

الحل

∵ ظا (٩٠° + θ) = − ظتا θ ∴ ظا (٩٠° + θ) = − $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ = − $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

∵ قتا (٩٠° + θ) = قا θ ∴ قتا (٩٠° + θ) = ٣

حاول أن تحل

(٦) فى المثال السابق أوجد: جا (٩٠° + θ) ، قا (٩٠° + θ)

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

٧) $\text{ظا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \text{ظتا}\theta = -\sqrt{٣}$

$\text{قتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \text{قا}\theta = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

- ناقش مع طلابك العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين، θ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$ مستعينًا بما ورد فى صفحة (١١٦) من كتاب الطالب.

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل صفحة (١١٨)

٨) $\text{ظتا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{ظا}\theta = -\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

$\text{قتا}(٢٧٠^\circ + \theta) - \text{قا}\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٩) أ) $٤\theta \pm ٢\theta = \frac{\pi}{٢}$

إما $٦\theta = \frac{\pi}{٢}$ ، أى $\theta = \frac{\pi}{١٢}$

أو $٢\theta = \frac{\pi}{٢}$ ، أى $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحل العام هو: $\frac{\pi}{١٢} + ٢\text{ن}\pi$ أو $\frac{\pi}{٤} + ٢\text{ن}\pi$

ب) $\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{٤}{٥}$ أى $\text{جتا}\theta = \frac{١}{٢}$

الحل العام هو:

$\frac{\pi}{٣} + ٢\text{ن}\pi$ أو $\frac{٥\pi}{٣} + ٢\text{ن}\pi$ حيث ن $\in$ ص

ج) $\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$ حيث ن $\in$ ص

أى: $٦\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\text{ن}\pi$

أى $\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{١}{٣}\text{ن}\pi$

أو $٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\text{ن}\pi$

$\theta = \frac{\pi}{٨} + \frac{١}{٢}\text{ن}\pi$

١٠) إجابة زياد خطأ، لأن $\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = -\text{جتا}\theta$

والصواب هو $\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{جتا}\theta$

٦- الدوال المثلثية لأى لزاويتين قياسيهما θ ، $(٢٧٠^\circ - \theta)$

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ، $(٢٧٠^\circ - \theta)$ كالآتى:

$\text{جا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{جتا}\theta$ ، $\text{قتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{قا}\theta$

$\text{جتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{جا}\theta$ ، $\text{قا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{قتا}\theta$

$\text{ظا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \text{ظتا}\theta$ ، $\text{ظتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \text{ظا}\theta$

مثال

٣) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$ فأوجد الدوال المثلثية: $\text{جتا}(٢٧٠^\circ - \theta)$ ، $\text{ظتا}(٢٧٠^\circ - \theta)$

الحل

$\because \text{جتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{جا}\theta$ $\therefore \text{جتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

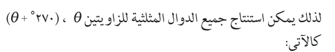
$\because \text{ظتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \text{ظا}\theta$ $\therefore \text{ظتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

حاول أن تحل

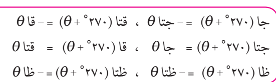
٧) فى المثال السابق أوجد $\text{ظا}(٢٧٠^\circ - \theta)$، $\text{قتا}(٢٧٠^\circ - \theta)$

٧- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$

من تطابق المثلثين: ب/ جـ/ و، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$ كالآتى:



$\text{جا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{جتا}\theta$ ، $\text{قتا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{قا}\theta$

$\text{جتا}(٢٧٠^\circ + \theta) = \text{جا}\theta$ ، $\text{قا}(٢٧٠^\circ + \theta) = \text{قتا}\theta$

$\text{ظا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{ظتا}\theta$ ، $\text{ظتا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{ظا}\theta$



مثال

٤) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{\sqrt{٥}}{٣}، \frac{٢}{٣})$ فأوجد الدوال المثلثية: $\text{جا}(٢٧٠^\circ + \theta)$ ، $\text{قا}(٢٧٠^\circ + \theta)$

١١٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ ∵ جا θ = جتا θ وبقسمة الطرفين على جتا θ تكون ظا θ = ١ ، مجموعة الحل هى $\{\frac{\pi}{٤}\}$

حل آخر: ∵ جا θ = جتا θ ∴ $\theta + \theta = \frac{\pi}{٢}$

∴ $\theta = \frac{\pi}{٤}$

ب $\theta + \frac{\pi}{٢} + \theta = \frac{\pi}{٢}$ ∴ ٢$\theta = \frac{\pi}{٢}$

∴ مجموعة الحل هى $\{\frac{\pi}{٦}\}$

ج ٢ جا θ = ١ ∴ جا $\theta = \frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل هى $\{\frac{\pi}{٦}\}$

حل آخر : جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{١}{٢}$

∴ جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∴ $\frac{\pi}{٢} - \theta = \frac{\pi}{٣}$ أى أن $\theta = \frac{\pi}{٦}$ وهناك حلول آخرى

التقييم

إذا كانت الزاوية θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٣، −٤) فأوجد:

جتا $(\frac{\pi}{٣} + \theta)$، جا $(\frac{٥\pi}{٣} - \theta)$، ظا $(\frac{٥\pi}{٣} + \theta)$

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين:

إذا كان الضلع النهائى للزاوية المرسومة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من جا (٩٠° − θ)، جتا (٩٠° + θ)، ظا (٢٧٠° − θ) لكل مما يأتى:

أ ب$(\frac{١٥}{١٧}، \frac{٨}{١٧})$　　ب ب$(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

ج ب$(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{١}{٢})$　　د ب$(-\frac{٤}{٥}، -\frac{٣}{٥})$

الزاويا المنتسبة

الحل

∵ جا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ　　∴ جا (٢٧٠° + θ) = $-\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

∵ قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ　　∴ قا (٢٧٠° + θ) = $\frac{٣}{٢}$

حاول أن تحل

٨ فى المثال السابق أوجد ظتا (٢٧٠° + θ) ، قتا (٢٧٠° + θ).

الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة: (جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β)

General solution of trigonometric equations as the form [tan(α) = cot(β), sec(α) = cscb(β), sin(α) = cos(β)]

فكر و ناقش

سبق أن درست أنه إذا كان α، β هما قياسا زاويتين متتامتين (أى مجموع قياسيهما ٩٠°) فإن جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β ومن ذلك فإن $\alpha + \beta$ = ٩٠° حيث α، β زاويتان حادتان فإذا كانت جا θ = جتا ١٥° فما هى قيم زاوية θ المتوقعة؟

تعلم

١- إذا كان جا α = جتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$　ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$　أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} + \beta)$　ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} + \beta$　أى $\alpha - \beta = \frac{\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن ∈ ص) إلى الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ فإن:

عندما جا α = جتا β　فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن

(حيث ن ∈ ص)، بالمثل:

عندما قتا α = قا β　فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن

(حيث ن ∈ ص)، $\alpha \neq$ نπ ، $\beta \neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$

٢- إذا كان ظا α = ظتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن :

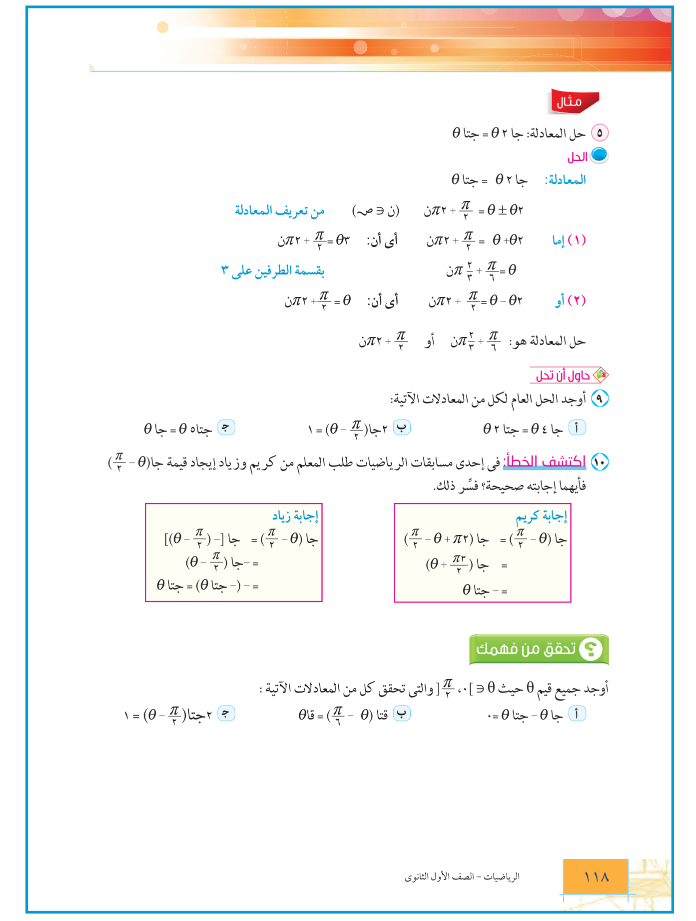
- ظا α = ظا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$　ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$　أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- ظا α = ظا $(\frac{٣\pi}{٢} - \beta)$　ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{٣\pi}{٢} - \beta$　أى $\alpha + \beta = \frac{٣\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن ∈ ص) إلى الزاويتين $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن:

عندما ظا α = ظتا β　فإن $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$ + πن

(حيث ن ∈ ص)، $\alpha \neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$ ، $\beta \neq$ نπ

كتاب الطالب – الفصل الدراسى الأول　١١٧



مثال

٥ حل المعادلة: جا ٢θ = جتا θ

الحل

المعادلة:　جا ٢θ = جتا θ

٢$\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن　(ن ∈ ص)　من تعريف المعادلة

(١) إما　٢$\theta + \theta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن　أى أن: ٣$\theta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن

$\theta = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi$ن　بقسمة الطرفين على ٣

(٢) أو　٢$\theta - \theta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن　أى أن: $\theta = \frac{\pi}{٢}$ + ٢πن

حل المعادلة هو: $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi$ن　أو　$\frac{\pi}{٢}$ + ٢πن

حاول أن تحل

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ جا ٤θ = جتا ٢θ　ب ٢جا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = ١　ج جتا٥θ = جا θ

١٠ اكتشف الخطأ: فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة جا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

إجابة كريم
جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $(٢\pi + \theta - \frac{\pi}{٢})$
= جا $(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)$
= − جتا θ

إجابة زياد
جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $[-(\frac{\pi}{٢} - \theta)]$
= −جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$
= − (− جتا θ) = جتا θ

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم θ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[والتى تحقق كل من المعادلات الآتية :

أ جا θ − جتا θ =٠　ب قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦})$ = قاθ　ج ٢جتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = ١

الرياضيات – الصف الأول الثانوى　١١٨

٤ - ٥

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

Graphing Trigonometric Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب دالتى الجيب وجيب التمام وفي هذا الدرس سوف يتعرف بصورة مبسطة على كيفية رسم منحنى دالتى الجيب وجيب التمام والتعرف على بعض الخواص البسيطة لهذه الدوال.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يرسم دالة الجيب فى فترة معطاة.
- يستنتج خواص دالة الجيب.
- يرسم دالة جيب التمام فى فترة معطاة.
- يستنتج خواص دالة جيب التمام.
- يحل بعض التطبيقات الفيزيائية التى تتعلق بدالتى الجيب وجيب التمام.

مفردات أساسية

دالة جيب – دالة جيب تمام – قيمة عظمى – قيمة صغرى.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية – آلة حاسبة رسومية – كمبيوتر – برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

التعلم التعاونى – المناقشة – الاكتشاف – حل المشكلات – التدريس باستخدام الحاسبة العلمية والحاسوب.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١١٩ إلى صفحة ١٢١

كتاب الأنشطة والتدريبات صـ ٦٠

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

تمهيد: فكر وناقش:

بين للطلاب مدى أهمية الموجات فوق الصوتية فى الأجهزة الطبية، ونقل الموجات عبر الأثير، وحركة الخفافيش فى الظلام، وكذلك حركة الغواصات فى أعماق المياه.

٤ - ٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية

Graphing Trigonometric Functions



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف فى طول الموجة. كما تستخدم فى التصوير الطبى، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل فى أعماق المحيطات .وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:

سوف تتعلم

سوف تتعلم :
- رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
- رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.

التمثيل البيانى لدالة الجيب Represent sine function graphically

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- قيمة عظمى Maximum Value
- قيمة صغرى Minimum Value

عمل تعاونى

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
جا θ	٠	٠,٥							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولا آخر مستخدما قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى
- برامج رسومية

٦ هل لاحظت وجود قيم عُظمى أو قيم صُغرى لهذا المنحنى. فسِّر إجابتك؟

عرض الدرس

تعلم: التمثيل البيانى لدالتى الجيب وجيب التمام

ملاحظات على بند عمل تعاونى صفحتى (١١٩)، (١٢٠)

عمل تعاونى:

أنشئ جدولًا كما هو مبين، وضع به بعض الزوايا الخاصة للزاوية θ فى الفترة [٠، ٢π]، وقسم الفصل إلى مجموعات، اطلب من بعض المجموعات إكمال جدول دالة الجيب، ومن المجموعات الأخرى إكمال دالة جيب التمام، ثم اطلب إليهم رسم نقاط الجدول على ورق رسم بيانى واستنتاج خواص كل دالة من خلال المجال، المدى، القيم العظمى، القيم الصغرى مع تحديد أوجه التشابه والاختلاف بين دالتى الجيب وجيب التمام.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٢٢)

يمكن للسفينة دخول الميناء عندما ن ∈ [٠، ١٢] بالساعات.

اتساع

دالة الجيب التى على الصورة د(س) = أ جا ب

ودالة جيب التمام التى على صورة د(س) = أ جتا ب

لها الخواص التالية:

سعة الدالة هى |أ| وطول دورتها $\frac{٢\pi}{|ب|}$

فإذا كانت ص = ٢ جا٣θ فإن

السعة |٢| = ٢ وطول الدورة = $\frac{٢\pi}{٣}$،

إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ جتا٤θ

فإن السعة = $\frac{١}{٢}$، طول الدورة = $\frac{\pi}{٤}$

امثلة إضافية للطلاب المتفوقين

الربط بالفيزياء: إذا سقطت حشرة فى شبكة العنكبوت فإنها تهتز بتردد يبلغ ١٠ هيرتز (أى ١٠ دورات فى الثانية الواحدة).

أ) أوجد طول دورة الدالة.

ب) إذا كانت سعة الدالة تساوى وحدة واحدة. فاكتب دالة الجيب كذلك تمثل الشبكة ص فى الزمن ن ومثلها بيانيًّا.

تعلم خواص دالة الجيب — Properties of the sine function

فى الدالة د حيث د(θ) = جا θ فإن:

★ مجال دالة الجيب هو]− ∞، ∞[، ومداها [− ١، ١]

★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة ٢π أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠،٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة، ٦π وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ نπ ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى− ١ وتحدث عند النقاط θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ نπ ن ∈ ص

التمثيل البيانى لدالة جيب التمام — Represent cosine function graphically

عمل تعاونى

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

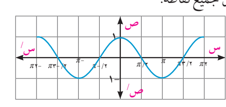
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جتا θ	١	٠,٨							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولًا آخر مستخدمًا قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حَصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



تعلم خواص دالة جيب التمام — Properties of cosine function

في الدالة د حيث د(θ) = جتا θ فإن:

★ مجال دالة جيب التمام هو]−∞، ∞[، ومداها [−١، ١]

★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة٢π، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، ٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة ، ٦π وحدة ، ... وهكذا.


١٢٠

الرياضيات – الصف الأول الثانوى

الحل:

∵ طول الدورة = $\frac{١}{التردد}$

∴ طول الدورة = $\frac{١}{١٠}$ = ٠,١ ثانية

∵ طول الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

∴ ٠,١ = $\frac{٢\pi}{|ب|}$ ∴ ب = $\frac{٢\pi}{٠,١}$

∴ ب = ٢٠π

∵ الصورة العامة لدالة الجيب

ص = أ جابθ

بالتعويض عن أ = ١ ، ب = ٢٠

∴ ص = ١ جا٢٠πن

ص = ١ جا٢٠πن

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوى ١ وتحدث عند النقاط θ = ±٢ نπ ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوى -١ وتحدث عند النقاط θ = π ± ٢πن ن ∈ ص

مثال

(١) **الربط بالفيزياء:** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.
ارسم مخططًا بيانيًّا يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هى

من العلاقة: ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠

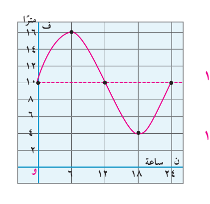
عندما ن = ٠ ف = ٦ جا (١٥ × ٠)° + ١٠ = ٦ جا ٠ + ١٠ = ١٠

عندما ن = ٦ ف = ٦ جا (١٥ × ٦)° + ١٠ = ٦ جا ٩٠° + ١٠ = ١٦

عندما ن = ١٢ ف = ٦ جا (١٥ × ١٢)° + ١٠ = ٦ جا ١٨٠° + ١٠ = ١٠

عندما ن = ١٨ ف = ٦ جا (١٥ × ١٨)° + ١٠ = ٦ جا ٢٧٠° + ١٠ = ٤

عندما ن = ٢٤ ف = ٦ جا (١٥ × ٢٤)° + ١٠ = ٦ جا ٣٦٠° + ١٠ = ١٠



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار
عندما ن = ١٠، ١٢، ٢٤ ساعة

حاول أن تحل

(١) في المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

تحقق من فهمك

(١) ارسم منحنى الدالة ص = ٣جاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

(٢) ارسم منحنى الدالة ص = ٢جتاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

إتساع

ملاحظة: يمكن حل هذا التمرين كتطبيق على التمرين السابق.

يستطيع الإنسان أن يسمع أصواتا يتراوح ترددها من ٢٠ إلى ٢٠٠٠٠ هيرتز.

(أ) أوجد طول دورة الدالة التى ترددها ٢٠ هيرتز.

(ب) إذا كانت السعة تساوى وحدة واحدة فاكتب دالة جيب التمام التى تعبر عن موجات الصوت ومثلها بيانيًّا.

التدريب والتقييم

التقييم

(١) مثل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو أحد برامج الحاسوب الرسومية.

(أ) ص = ٤جتاθ (ب) ص = ٣ جاθ

ثم أوجد: مدى كل دالة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة.

نشاط إضافى للطلاب المتفوقين

إبحار: تتحرك مركب فى البحر فترتفع وتنخفض مع حركة الأمواج، فإذا كان الفرق بين أعلى وأقل ارتفاع لها هو ٣٢سم، وتكون مستقرة عندما تكون فى منتصف المسافة بين نقطتى القيمة العظمى والقيمة الصغرى للموجة. أوجد القيمتين العظمى والصغرى للموجة.

[الإجابة: القيمة العظمى ١٦، القيمة الصغرى -١٦]

٤ - ٦

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Functions

خلفية

سبق أن درس الطالب كيفية إيجاد قيمة دالة مثلثية بمعلومية الزاوية θ. وفى هذا الدرس سيدرس العملية العكسية وهى إيجاد قيمة الزاوية θ بمعلومية دالة مثلثية، وتعرف هذه الخاصية بالدالة العكسية.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

يوجد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

يحل تطبيقات حياتية تتطلب إيجاد قياسات زوايا.

مفردات أساسية

دالة مثلثية

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

التدريس باستخدام الحاسبة العلمية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٢٢ إلى صفحة ١٢٣

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٦١ إلى صفحة ٦٢

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- وضح للطلاب بمثال عددى بأن التعبير جا٣٠° = $\frac{1}{2}$ يكافئ التعبير جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠°،ثم اطلب إليهم كتابة تعبيرات رياضية مكافئة للتعبير السابق (استخدم العصف الذهنى) درب طلابك على استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد قياسات زويا معلوم الدوال المثلثية لها..



٤ - ٦

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Trigonometric Ratios

سوف تتعلم

- إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية. Trigonometric Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

علمت أنه إذا كانت ص = جا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص بمعلومية الزاوية θ، وعندما تعطى قيمة ص فهل يمكنك إيجاد قيمة θ ؟

تعلم

إذا كانت ص = جا θ فإن θ = جا$^{-1}$ ص

فمثلًا إذا كانت θ زاوية حادة موجبة وكانت ص= $\frac{1}{2}$

فتكتب هذه العلاقة بالصورة θ = جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠°

مثال

(١) أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

أ) جا$^{-1}$ ٠,٦٣٢٥ ب) ظتا$^{-1}$ (– ١,٦٢٠٤)

الحل

أ) ∵ جيب الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ SHIFT sin⁻¹ 0 . 6 3 2 5 = °’’’

الربع الأول: θ = ٣٩° ١٤َ ٦ً

الربع الثانى: θ = ١٨٠° – ٣٩° ١٤َ ٦ً = ١٤٠° ٤٥َ ٥٤ً

ب) ∵ ظل تمام الزاوية < ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ SHIFT tan⁻¹ 1 . 6 2 0 4 x⁻¹ = °’’’

الربع الثانى: θ = ١٨٠° – ٣١° ٤٠َ ٤٨ً = ١٤٨° ١٩َ ١٢ً

١٢٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

عرض الدرس

تعلم

- أكد على أنه بصورة عامة إذا كانت ص = جاθ فإن θ = جا$^{-1}$ص وكذلك تكون ص = جتا$^{-1}$ص وهكذا وتعرف هذه الدوال بالدوال العكسية.

- ناقش مع طلابك المثال الواردة فى صفحة ١٢٢ من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(١) أ) ٥١° ٣٨َ ٥١ً، ٥١° ٢١َ ٩ً

ب) ١١٢° ٥٧َ ٢ً، ٢٩٢° ٥٧َ ٢ً

ج) ٢٨° ٢٣َ ١ً، ١٥١° ٣٦َ ٥٣ً

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

① الدالة المستخدمة هي دالة الجيب، حيث : جا $\theta = \frac{١٠}{١٦}$
لذلك فإن (θ) = ٣٨° ٤٠َ ٥٦ً

② الدالة المستخدمة هي دالة الجيب حيث : جا $\theta = \frac{٨}{٦٥}$
(θ) = ١١ ١٠َ ٧ً°

③ إجابة كريم صحيحة؛ لأنه استخدم دالة قاطع التمام وهي معكوس دالة الجيب.

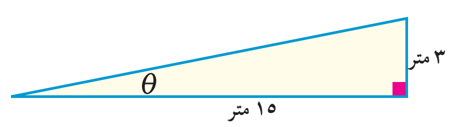
④ البعد الأفقي = ٤ وحدات طول، البعد الرأسي = ٣ وحدات طول

تستخدم دالة الظل

ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$ $\qquad$ (θ) = ١٢ ٥٢َ ٣٦ً°

التقييم

يمثل الشكل التالي منحدر يميل على سطح الأرض الأفقية بزاوية θ°، اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قياسها θ التقدير الستيني ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالتقدير الدائري.



نشاط إثرائي للطلاب المتفوقين:

سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار، فإذا كان ارتفاع السلم من سطح الأرض هو ٣ أمتار. فأوجد بالقياس الدائري زاوية ميل السلم على الأفقي.

الربع الرابع: θ = ٣٦٠° – ٣١° ٤٠َ ٤٨ً = ٣٢٨° ١٩َ ١٢ً

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

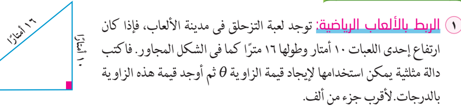
حاول أن تحل

① أوجد θ حيث ٠ < θ < ٣٦٠° والتي تحقق كلًّا مما يأتي:

أ جتا$^{-١}$ ٠,٦٢٠٥ $\qquad$ ب ظا$^{-١}$ (– ٢,٣٦١٥) $\qquad$ ج قتا$^{-١}$ (– ٢,١٠٣٦)

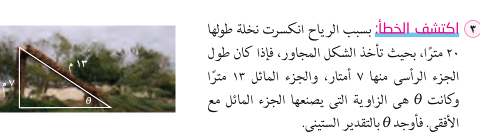
تحقق من فهمك

① **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزحلق في مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما في الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات.لأقرب جزء من ألف.



② **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقي زاوية قياسها θ . أوجد θ بالتقدير الستيني.

③ **اكتشف الخطأ:** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا، بحيث تأخذ الشكل المجاور، فإذا كان طول الجزء الرأسي منها ٧ أمتار، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هي الزاوية التي يصنعها الجزء المائل مع الأفقي. فأوجد θ بالتقدير الستيني.

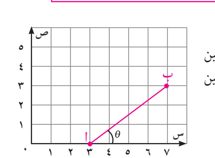




إجابة كريم
∵ قتا $\theta = \frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قتا$^{-١}$ $\frac{١٣}{٧}$
∴ θ = ٤٤ ٣٤َ ٣٢ً°

إجابة عمر
∵ قا $\theta = \frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قا$^{-١}$ $\frac{١٣}{٧}$
∴ θ = ١٦ ٢٥َ ٥٧ً°

④ **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب (٧، ٣) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{أ ب}}$ ومحور السينات.





الفصل الدراسى الثانى

الوحدة الأولى

المصفوفات

Matrices

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب تنظيم البيانات فى جداول، والآن سوف يدرس الطالب طريقة أخرى لتنظيم البيانات باستخدام المصفوفات وبعض المصفوفات الخاصة، وجمع وطرح وضرب المصفوفات وكيفية إيجاد محدد مصفوفة مربعة وحل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كرامر، ثم يدرس الطالب كيفية إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفه وحل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات، وذلك من خلال خمسة دروس هى كالآتي:

الدرس الأول: تنظيم البيانات فى مصفوفات.

الدرس الثانى: جمع وطرح المصفوفات.

الدرس الثالث: ضرب المصفوفات.

الدرس الرابع: المحددات.

الدرس الخامس: المعكوس الضربى للمصفوفة.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- يتعرف المصفوفات الخاصة (مصفوفة الصف - مصفوفة العمود - المصفوفة المربعة - المصفوفة الصفرية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - المصفوفة المتماثلة - المصفوفة شبه المتماثلة).
- يضرب عدد حقيقي فى مصفوفة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة (مصفوفة الصف - مصفوفة العمود - المصفوفة المربعة - المصفوفة الصفرية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة).
- يضرب عددًا حقيقيًا في مصفوفة .
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتحقق من صحة حلول بعض المشكلات التى تتضمن مصفوفات باستخدام البرمجيات المتاحة.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات في مجالات أخرى.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة المحدد على الصورة المثلثية.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة.
- يحل المعادلات بطريقة كرامر.
- يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.

المصطلحات الأساسية

- مصفوفة Matrix
- عنصر Element
- مصفوفة الصف Row matrix
- مصفوفة العمود Column matrix
- مصفوفة مربعة Square matrix
- مصفوفة صفرية Zero matrix
- مصفوفات متساوية Equal matrices
- مصفوفة متماثلة Symmetric matrix
- مصفوفة شبه متماثلة Skew−symmetric matrix
- مصفوفة الوحدة Identity matrix
- معادلة مصفوفية Matrix equation
- مصفوفة المتغيرات Variable matrix
- مصفوفة الثوابت Constant matrix
- جمع المصفوفات Adding matrices
- طرح المصفوفات Subtracting matrices
- ضرب المصفوفات Multiplying matrices
- مدور المصفوفة Transpose of matrix
- محدد Determinant
- محدد الرتبة الثانية Second order determinant
- محدد الرتبة الثالثة Third order determinant
- مصفوفة المعاملات Coefficient matrix
- معكوس ضربى للمصفوفة Inverse matrix



دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): تنظيم البيانات في مصفوفات.

الدرس (١ - ٢): جمع وطرح المصفوفات.

الدرس (١ - ٣): ضرب المصفوفات .

الدرس (١ - ٤): المحددات .

الدرس (١ - ٥): المعكوس الضربي للمصفوفة

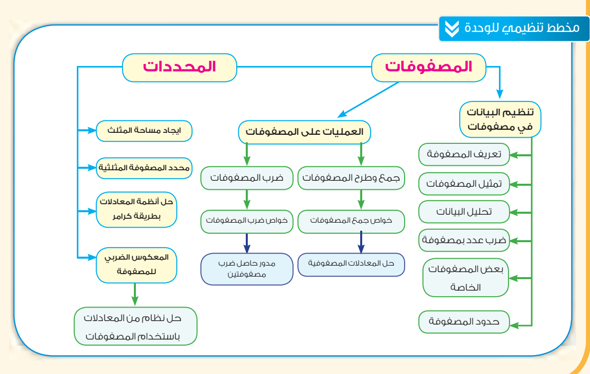
الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - برنامج الاكسيل Excel - جهاز كمبيوتر.

نبذه تاريخية

المصفوفات هي جمع كلمة مصفوفة، وهى من المفاهيم الرياضية التي انتشر استخدامها في عصرنا الحاضر، فشملت العديد من فروع المعرفة، فنجد استخداماتها في علوم الاحصاء والاقتصاد، والاجتماع وعلم النفس وغيرها، وذلك لأنها تعرض البيانات، وتخزنها في صورة جداول مستطيلة الشكل، وتنظيم البيانات بهذه الصورة يسهل تذكرها والمقارنة بينها وإجراء العمليات عليها، كما أن للمصفوفات دورًا هامًّا في علم الرياضيات وخاصة في فرع الجبر الخطى، وأول من لاحظ المصفوفات واستخدمها هو العالم كيلي (١٨٢١ - ١٨٩٥م).

مخطط تنظيمي للوحدة



- يوجد مدور المصفوفة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتحقق من صحة حلول بعض المشكلات التى تتضمن مصفوفات باستخدام البرمجيات المتاحة.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات أخرى.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة المحدد على الصورة المثلثية.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة ٢ × ٢.
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة.
- يحل المعادلات بطريقة كرامر.
- يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.

زمن تدريس الوحدة

١٠ ساعات

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - آلة حاسبة علمية - ألوان رصاص.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - التعلم التعاونى - حل المشكلات

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الناقد - التفكير التحليلى - حل المشكلات - التفكير المنطقي - التفكير الإبداعى فى الرياضيات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

١ - ١
تنظيم البيانات فى مصفوفات
Organizing data in Matrices

خلفية
سبق أن درس الطالب تنظيم البيانات فى جداول، والآن سوف يدرس طريقة أخرى لتنظيم البيانات باستخدام المصفوفات.

أهداف الدرس
فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يحدد معنى المصفوفة.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة (مصفوفة مربعة – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – المصفوفة الصفرية – المصفوفة القطرية – مصفوفة الوحدة).
- يوجد مدور المصفوفة.
- يحدد المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- يحدد متى يتساوى مصفوفتان.
- يضرب عدد حقيقي فى مصفوفة

مفردات أساسية
مصفوفة – عنصر – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – مصفوفة مربعة – مصفوفة صفرية – مصفوفات متساوية – مصفوفة متماثلة – مصفوفة شبه متماثلة.

المواد التعليمية المستخدمة
السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – جهاز كمبيوتر – برنامج الاكسيل – آلة حاسبة بيانية.

طرق التدريس المقترحة
العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس
الفصل الدراسى

مصادر التعلم
كتاب الطالب من صفحة ٤ إلى صفحة ١٣
كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢ إلى صفحة ٣
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

١ - ١ تنظيم البيانات في مصفوفات
Organizing data in Matrices

سوف تتعلم
- ما المصفوفة؟
- بعض المصفوفات الخاصة (المصفوفة المربعة – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – المصفوفة الصفرية – المصفوفة القطرية – مصفوفة الوحدة)
- مدور المصفوفة
- المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- تساوى مصفوفتين.
- ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- مصفوفة Matrix
- عنصر Element
- مصفوفة الصف Row matrix
- مصفوفة العمود Column matrix
- مصفوفة مربعة Square matrix
- مصفوفة صفرية Zero matrix
- مصفوفات متساوية Equal matrix
- مصفوفة متماثلة Symmetric matrix
- مصفوفة شبه متماثلة Skew symmetric matrix

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة بيانية
- برنامج الإكسيل
- جهاز كمبيوتر
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

الربط بالصناعة

مصنع لإنتاج بعض مكونات شاشات التليفزيون به ٣ أقسام، ينتج ٤ أجزاء رئيسية من الشاشة أ، ب، جـ، د على النحو التالي:

القسم الأول ينتج يوميًا ٧٥ قطعة من أ ، ١٣٥ قطعة من ب ، ١٥٠ قطعة من جـ ، ٢١٥ قطعة من د .

القسم الثاني ينتج يوميًا ١٠٠ قطعة من أ ، ١٦٨ قطعة من ب ، ٢١٠ قطعة من جـ، ٢٨٢ قطعة من د.

القسم الثالث ينتج يوميًّا ٨٠ قطعة من أ ، ١٠٠ قطعة من ب ، ١٤٤ قطعة من جـ ، ٦٤ قطعة من د.

واضح أنه من الصعب تذكر هذه المعلومات أو المقارنة بينها، وهي على هذه الصورة والآن هناك سؤالاً يطرح نفسه:
كيف يمكن ترتيب هذه البيانات حتى يمكن تحليلها والاستفادة منها؟

للإجابة عن هذا السؤال فإنه يمكننا كتابة البيانات في صورة جدول يمكننا من معرفة ما ينتجه كل قسم من الأقسام الثلاثة من الأجزاء المختلفة بسرعة ووضوح، كما يسهل لنا المقارنة بين إنتاج الأقسام الثلاثة من الأجزاء المختلفة.

الأجزاء

الأقسام	أ	ب	جـ	د
القسم الأول	٧٥	١٣٥	١٥٠	٢١٥
القسم الثاني	١٠٠	١٦٨	٢١٠	٢٨٢
القسم الثالث	٨٠	١٠٠	١٤٤	٦٤



الرياضيات – الصف الأول الثانوى

إجراءات الدرس

التمهيد:
اطلب إلى طلابك التركيز لعمل قائمة لكل المواقع التى سبق أن رأوا فيها البيانات معروضة فى صورة مصفوفة مكونة من الصفوف والأعمدة (مثل جدول مواعيد الأتوبيسات – تقارير الصحف اليومية – نتيجة الامتحانات ......).

فكر وناقش
ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش» موضحًا كيفية التعبير عن الجدول فى صورة مصفوفة، وتحديد نظم المصفوفة وعدد عناصرها.

إجابات بند «فكر وناقش»

١- نعم؛ نبدل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف فنحصل على مصفوفة ٤ × ٣.

٢- ١٣٥؛ ١٠٠ ٣- إجابات متنوعة.

عرض الدرس

تعلم: تنظيم البيانات في مصفوفات

أكد لطلابك على مفهوم المصفوفة وكيفية التعبير عن المصفوفة وعناصرها وكيفية التعبير عن عنصر يقع في صف وعمود معين، ولتأكيد فهم طلابك لذلك اطلب إليهم حل ما ورد في بند «حاول أن تحل» بداية صفحة (٦) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل بداية صفحة (٦)

(١) (أ) ٣ × ٢ (ب) ٥ ، ٣

انتقل إلى تمثيل المصفوفات موضحًا أن المصفوفة أ التي على النظم م × ن يمكن كتابتها على الصورة:

أ = $(أ_{س ص})$ حيث ص = ١، ٢، ٣، ......، م ، س = ١، ٢، ٣، ......، ن

ووضح لطلابك.أن دراستنا سوف تقتصر على الحالات التي فيها م ⩽ ٣، ن ⩽ ٣، وناقش مع طلابك المثال الموضح صفحة (٦) من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم حل ما ورد في بند «حاول أن تحل» نهاية هذه الصفحة مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابة بند «حاول أن تحل» نهاية صفحة (٦)

(٢) (أ) أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ب_{١١} \\ ب_{١٢} \end{pmatrix}$

المثال رقم (٢) صفحة (٧) هو تطبيق حياتي ناقش هذا المثال مع طلابك، ثم اطلب إليهم إعطاء أمثلة من عندهم لتطبيقات حياتية أخرى مشابهة. ناقش الأمثلة المقدمة منهم مع تعزيز الطلاب الذين عرضوا أمثلة متميزة.

التقييم المستمر

إجابات «حاول أن تحل» صفحة (٧)

(٣) (أ)

	عدد المباريات	عدد التسديدات	عدد الأهداف
سمير	١٠	٢٠	٥
حازم	١٦	٣٥	٨
كريم	١٨	٤١	١٠

(ب) ٣ × ٣ ؛ ٨

فإذا كنا نعلم أن الأعداد بالصف الأول هي إنتاج القسم الأول من الأجزاء أ ، ب، جـ ، د على الترتيب، وبالمثل الأعداد التي بالصف الثاني هي إنتاج القسم الثاني بنفس الترتيب، وكذلك الأعداد التى بالصف الثالث هي إنتاج القسم الثالث بنفس الترتيب، فإننا نستطيع كتابة المعلومات التى بالجدول السابق بصورة أكثر اختصارًا كالآتي:

	العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث	العمود الرابع
الصف الأول	٧٥	١٣٥	١٥٠	٢١٥
الصف الثاني	١٠٠	١٦٨	٢١٠	٢٨٢
الصف الثالث	٨٠	١٠٠	١٤٤	٦٤

وتسمى هذه الصورة "مصفوفة" كما تسمى الأعداد داخل القوسين "عناصر المصفوفة"

وهذه المصفوفة لها ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة، لذا يقال لها مصفوفة على النظم ٣ × ٤ (أو بالاختصار مصفوفة ٣ × ٤) حيث تذكر عدد الصفوف أولا ثم عدد الأعمدة، كما نلاحظ أن:
عدد عناصر المصفوفة = ٣ × ٤ = ١٢ عنصرًا .

والآن:

١- هل هناك طريقة أخرى لترتيب بيانات المسألة ، ووضعها على صورة مصفوفة أخرى؟ فسر إجابتك.
٢- من المصفوفة السابقة ، ما العنصر في الصف الأول والعمود الثاني؟ وما العنصر في الصف الثاني والعمود الأول؟
٣- **سؤال مفتوح:** اكتب مثالاً من عندك يمكن كتابة المعلومات المتضمنة فيه على صورة مصفوفة ٢ × ٣

تعلم

تنظيم البيانات في مصفوفات — Organizing Data in Matrices

المصفوفة هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين، وتنظم العناصر في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى، ويرمز إلى المصفوفة عادة باستخدام الحروف الكبيرة أ، ب ، ج، س، ص، .... ولعناصر المصفوفة بالحروف الصغيرة أ، ب، جـ، س، ص ، ....

إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة أ الذي يقع في الصف ص والعمود ع فإنه يمكننا كتابته على الصورة $أ_{ص ع}$

فمثلاً العنصر $أ_{٢١}$ يقع في الصف الأول والعمود الثاني، وكذلك $أ_{٢٣}$ يقع في الصف الثالث والعمود الثاني.

فى المصفوفة: أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -١ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ & -٢ & -١ \end{pmatrix}$

العنصر -١ يقع في الصف ٢ والعمود ٢ ويرمز له بالرمز $أ_{٢٢}$

العنصر ٦ يقع في الصف ١ والعمود ٣ ويرمز له بالرمز $أ_{٣١}$



وبصفة عامة:

المصفوفة المكونة من م صفًا، ن عمودًا تكون على النظم م × ن أو من الرتبة م × ن أو من النوع م × ن (وتقرأ م فى ن، حيث م، ن أعداد صحيحة موجبة.

حاول أن تحل

(١) استخدم المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ للإجابة عن مايلى:
(أ) ما نظم المصفوفة ب؟ (ب) ما قيمة $ب_{٢١}$، $ب_{١٢}$؟

تعلم

تمثيل المصفوفات — Representing Matrcies

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فإنه يمكن كتابة المصفوفة أ على الصورة:

أ = $(أ_{ص ع})$، ص = ١ ، ٢، ٣، ....، م
ع = ١ ، ٢، ٣، ....، ن

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها م ⩽ ٣ ، ن ⩽ ٣

مثال

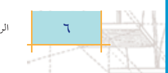
(١) اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية:
(أ) أ = $(أ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١، ٢، ٣
(ب) ب = $(ب_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢، ٣ ، ع = ١
(ج) ج = $(جـ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١، ٢

الحل

(أ) أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣
(ب) ب = $\begin{pmatrix} ب_{١١} \\ ب_{١٢} \\ ب_{١٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ١
(ج) ج = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

حاول أن تحل

(٢) اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية:
(أ) أ = $(أ_{ص ع})$، ص = ١ ، ٢ ،٣، ع = ١، ٢، ٣
(ب) ب = $(ب_{س ص})$، ص = ١ ، ٢، ع = ١



تـرابطات

انتقل إلى المثال نهاية صفحة (٧) من كتاب الطالب، ويتناول «تنظيم البيانات الإحصائية باستخدام المصفوفات» وهو مثال يرتبط بالواقع، ويمكنك عرض ما يلي على طلابك: الكيلووات الواحد في الساعة يساوي $٣,٦ \times ١٠^{٦}$ جول، والجول وحدة قياس سميت باسم عالم الفيزياء البريطاني جيمس جول (١٨١٨م - ١٨٨٩م)، والذي قام بتطوير نظرية تنص على: أن السعرات الحرارية تشتق من الجهد بغض النظر عن شكله سواء كان جهدًا كيميائيًّا أو ميكانيكيًّا أو كهربائيًّا، ساعد الطلاب على أن يتذكروا أن $٣,٦ \times ١٠^{٦}$ تساوي ٣٦٠٠٠٠٠ وأشر إلى أن ترتيب البلدان في المصفوفة يمكن أن يكون هو الترتيب نفسه للبلدان في الرسم البياني، ثم اطلب إلى طلابك أن يضع كل منهم أحد أصابعه على البلد في الرسم، وأصبعًا آخر على البلد نفسه في المصفوفة لمقارنة البيانات.

التقييم المستمر

إجابات تفكير ناقد صفحة (٨):

ادخل صفًّا جديدًا لكل دولة إضافية

إجابات حاول أن تحل صفحة (٨):

(٤)

	دولة أ	دولة ب	دولة جـ
الإنتاج	٩,٥	١٣	١٩
الاستهلاك	٩,٥	٩	٢٥

(٥) المصفوفة التي على النظم جـ × ى بها جـ من الصفوف، ى من الأعمدة، بينما المصفوفة التي على النظم ى × جـ بها ى من الصفوف، جـ من الأعمدة.

بعض المصفوفات الخاصة

ناقش مع طلابك المصفوفات الخاصة الموضحة صفحة (٨) من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم عرض أمثلة من عندهم لكل منها.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٩)

(٦)
- أ مصفوفة مربعة ٢ × ٢
- ب مصفوفة صف ١ × ٤
- جـ مصفوفة عمود ٣ × ١
- د مصفوفة صفوية ٢ × ٢

مثال

(٢) **الربط بالمستهلك:** يبين الجدول المقابل الأسعار بالجنيه لثلاثة أنواع من الساندويتشات بثلاثة أحجام مختلفة في أحد مطاعم الوجبات الجاهزة.

أ نظم هذه البيانات في مصفوفة، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًا.

ب حدد نظم المصفوفة.

جـ ما قيمة العنصر $ا_{٣٢}$؟

	صغير	متوسط	كبير
صدور فراخ	٨	١٢	١٦
جمبري مقلي	٩	١٣	١٧
سمك فيليه	٧	١١	١٥



الحل

أ

	صغير	متوسط	كبير
سمك فيليه	٧	١١	١٥
صدور فراخ	٨	١٢	١٦
جمبري مقلي	٩	١٣	١٧

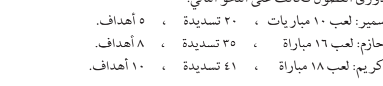
ب هناك ٣ صفوف، ٣ أعمدة لذا فإن المصفوفة على النظم ٣ × ٣

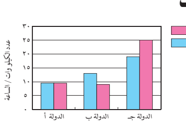
جـ قيمة العنصر $ا_{٣٢}$ هي الموجودة بالصف ٣ والعمود ٢ وهي ١٣

حاول أن تحل

(٣) رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة، إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات دوري الفصول فكانت على النحو التالي:

سمير: لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.
حازم: لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.
كريم: لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.





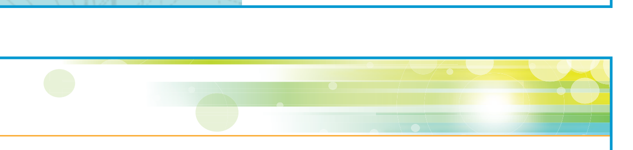
أ نظم البيانات في مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيبًا تصاعديًا تبعًا لعدد الأهداف.

ب حدد نظم المصفوفة، ما قيمة $ا_{٢٣}$؟

مثال تنظيم البيانات الإحصائية باستخدام المصفوفات

(٣) **الربط بالطاقة:** يمكن أن تقاس الطاقة بالكيلو وات / ساعة. يبين الرسم البياني المقابل إنتاج الطاقة والاستهلاك لبعض الدول. اكتب مصفوفة تمثل بيانات الرسم البياني المقابل.

الاستهلاك
الإنتاج
عدد الكيلووات/الساعة
الدولة أ
الدولة ب
الدولة جـ



الحل

افرض أن كل صف في المصفوفة يمثل دولة، وكل عمود يمثل مستوى الإنتاج والاستهلاك. استنتج القيم من الرسم.

	الإنتاج	الاستهلاك
دولة (أ)	٩,٥	٩,٥
دولة (ب)	١٣	٩
دولة (جـ)	١٩	٢٥

تفكير ناقد

كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتمثيل البيانات بإضافة دول أخرى؟

حاول أن تحل

(٤) أعد كتابة البيانات في المثال السابق في صورة مصفوفة ٢ × ٣، ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

(٥) وضح الفرق بين المصفوفة التي على النظم ٢ × ٣، والمصفوفة التي على النظم ٣ × ٢

تعلم بعض المصفوفات الخاصة Some special Matrices

أ **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة مثل: $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ (مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢)

ب **مصفوفة الصف:** هي المصفوفة التي تحتوي على صف واحد وأي عدد من الأعمدة مثل: $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ (مصفوفة صف على النظم ١ × ٤)

جـ **مصفوفة العمود:** هي المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد، وأي عدد من الصفوف مثل: $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥- \\ ١ \end{pmatrix}$ (مصفوفة عمود على النظم ٣ × ١)

د **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفار وقد تكون مربعة أو لاتكون
أمثلة المصفوفات:
(٠) مصفوفة صفرية على النظم ١ × ١، $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ١ × ٢، $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ١، $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢، ويرمز للمصفوفة الصفرية بمستطيل صغير □

هـ **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسي فيكون أحدها على الأقل مغايرًا للصفر فمثلًا المصفوفة: $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣)

و **مصفوفة الوحدة:** هي مصفوفة قطرية، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسي مساويًا الواحد، ويرمز لها بالرمز I. فمثلًا كل من المصفوفات:
(١) ، $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة وحدة.



هـ مصفوفة قطرية ٢ × ٢

و مصفوفة قطرية ٢ × ٢

٧ 

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

تساوى مصفوفتين

ناقش مع طلابك متى تتساوى مصفوفتان مستعينًا بالمثال رقم (٤) صفحة (٩) من كتاب الطالب، أعط امثلة لمصفوفتين متساويتين وأمثلة أخرى لمصفوفتين غير متساويتين، ثم اطلب إلى الطلاب عرض أمثلة من عندهم.

تجنب الخطأ

أخطاء واردة: قد لايستطيع الطلاب تحديد أىُّ مصفوفتين هما المتساويتان.

مقترحات للعلاج

اشرح لطلابك أنه عند تحديد ما إذا كانت مصفوفتان متساويتين أم لا، فيجب أن نقارن كل زوج من العناصر المتقابلة فى كلتا المصفوفتين والتأكد من أنه حتى إذا كانت كل أزواج العناصر متساوية إلا عنصرًا واحدًا فإن المصفوفتان تكونا غير متساويتين.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٩)



٨ أ نعم؛ جميع العناصر المتناظرة متساوية.

ب لا؛ يوجد عنصران متناظران غير متساويين.

ناقش مع طلابك كيفية استخدام المصفوفات فى حل المعادلات مستعينًا بالمثال (٥) الوارد صفحة (٩) من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (١٠).

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠)

٩ س = ٣٠؛ ص = ٢

١٠ س = ٣؛ ص = ١؛ ع = ١٣

١١ أ = ٣؛ ب = ٦؛ جـ = −٢؛ ى = ٤

حاول أن تحل

٦ اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها.

أ $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ جـ $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هـ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٧ اكتب المصفوفة الصفرية على النظم ٣ × ٣

تعلم

تساوى مصفوفتين — Equality of two Matrices

تتساوى مصفوفتان أ، ب إذا كانتا على نفس النظم، وكان كل عنصر في المصفوفة أ مساويًا لنظيره في المصفوفة ب **أي أن:** $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$ لكل ص ولكل ع.

مثال

٤ أ المصفوفتان $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ غير متساويتين لأنهما ليسا على نفس النظم.

ب $\begin{pmatrix} ١ & س & ٢ \\ -١ & ٦ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ & ٢ \\ -١ & ٦ & ص \end{pmatrix}$ إذا و فقط إذا كانت س = −٣ ، ص = ٥

جـ المصفوفتان $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ س & -١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ص \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ لايمكن أن يتساويا، وذلك لإختلاف أحد العناصر المناظرة في كل منهما (عناصر الصف الأول والعمود الأول)

د $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٥ \\ ١ & ٧ & ٠ \\ ٢ & ٦ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٥ \\ ١ & ٧ & ٠ \\ ٢ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ المصفوفتان متساويتان لأن لهما نفس النظم وعناصرهما المتناظرة متساوية.

حاول أن تحل

٨ أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -٠{,}٧٥ & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٢} & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -\frac{٣}{٤} & ٠{,}٢ \\ ٠{,}٥ & -٢ \end{pmatrix}$ هل أ = ب؟ فسر إجابتك.

ب إذا كانت سـ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، صـ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ هل سـ = صـ؟ فسر إجابتك .

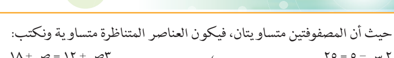
مثال

استخدام المصفوفات المتساوية في حل المعادلات

٥ إذا كان: $\begin{pmatrix} ٢س-٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص+١٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى س، ص.

الحل

$$\begin{pmatrix} ٢س-٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص+١٨ \end{pmatrix}$$



حيث أن المصفوفتين متساويتان، فيكون العناصر المتناظرة متساوية ونكتب:

٢ س − ٥ = ٢٥ ، ٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٢ س = ٢٥ − ٥ ، ٣ص − ص = ١٨ − ١٢

٢ س = ٢٠ ، ص = ٣

س = ١٠

الحل هو س = ١٠، ص = ٣

حاول أن تحل

٩ إذا كان $\begin{pmatrix} س+٨ & -٥ \\ ٣ & -ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥ \\ ٣ & ٤ص-١٠ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى س، ص

١٠ **تفكير ناقد:** إذا كان (٣س س + ص س − ع) = (−٩ ٤ −١٠) فأوجد قيم كل من س، ص، ع

١١ **تفكير ناقد:** إذا علم أن: $\begin{pmatrix} أ+ب & أ-ب \\ أ+ب+جـ & أ-ب+٢د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد قيم أ، ب، جـ، د

تعلم

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة — Multipling a Real Number by a Matrix

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الحقيقي **أي أن:** حاصل ضرب عدد حقيقي ك في مصفوفة أ على النظم م × ن هي مصفوفة ج = ك أ على نفس النظم م × ن وكل عنصر فيها $جـ_{ص ع}$ يساوى العنصر المناظر له في المصفوفة أ مضروبًا في العدد الحقيقي ك.

أي: $جـ_{ص ع} = ك\, أ_{ص ع}$ حيث ص = ١، ٢، ......، م ، ع = ١، ٢، ......، ن

لاحظ أن:

$$ك \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك س & ك ص \\ ك ع & ك ل \end{pmatrix}$$

فمثلاً $-٢ \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ \times ٤ & -٢ \times ١ \\ -٢ \times ٥ & -٢ \times -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & -٢ \\ -١٠ & ٢ \end{pmatrix}$

مثال

٦ تخطط إحدى الكافيتريات لرفع ثمن كل مشروب مرة ونصف المرة. استخدم لائحة الأسعار فى الجدول التالى لإيجاد ثمن كل مشروب بعد الزيادة؟

	حجم صغير	حجم كبير
كوب لبن كامل الدسم	٠,٧٥ من الجنيه	١,٥٠ من الجنيه
كوب عصير برتقال	٠,٨٥ من الجنيه	١,٧٥ من الجنيه
كوب عصير مانجو	٠,٩٠ من الجنيه	١,٩٠ من الجنيه



ضرب عدد حقيقي فى مصفوفة

أكد لطلاب أن ضرب عدد حقيقي فى مصفوفة يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى ذلك العدد الحقيقي، ثم ناقش معهم المثال (٦) صفحة (١٠) من كتاب الطالب وهو تطبيق حياتي.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١١)

(١٢) $-5\,\text{أ} = -5\begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 20 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 & 60 & -50 \\ -100 & 50 & -35 \\ 10 & -5 & -15 \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة

أكد على أنه فى أي مصفوفة أ على النظم م × ن، إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب، فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م، وتسمى مدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز أ$^{\text{مد}}$ و إن $(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}$

المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة

أكد على أنه إذا كانت أ مصفوفة مربعة، فإنها تسمى متماثلة إذًا وفقط إذا كانت أ = أ$^{\text{مد}}$، وتسمى شبه متماثلة إذًا وفقط إذا كانت أ = −أ$^{\text{مد}}$

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٢)

(١٣) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{أ}$

∴ المصفوفة أ مصفوفة متماثلة

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

(١) (أ) س = ٣ (ب) س = ٢، ص = ٣، ع = ٣

(٢) (أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.

نشاط الربط بالتكنولوجيا

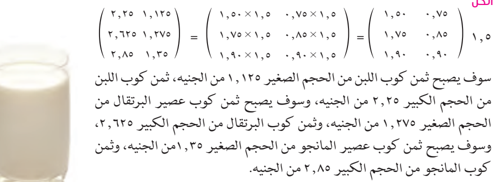
إجابات حاول أن تحل

(١٤) إجابات متنوعة

(١٥) مبيعات السوبر ماركت من كل نوع فى كل من الاسابيع الإربعة .

(١٦) إجابات متنوعة (١٧) إجابات متنوعة

الحل



$1.5\begin{pmatrix} 0.75 & 1.50 \\ 0.85 & 1.70 \\ 0.90 & 1.90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5\times0.75 & 1.5\times1.50 \\ 1.5\times0.85 & 1.5\times1.70 \\ 1.5\times0.90 & 1.5\times1.90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.125 & 2.25 \\ 1.275 & 2.625 \\ 1.35 & 2.85 \end{pmatrix}$



سوف يصبح ثمن كوب اللبن من الحجم الصغير ١,١٢٥ من الجنيه، ثمن كوب اللبن من الحجم الكبير ٢,٢٥ من الجنيه، وسوف يصبح ثمن كوب عصير البرتقال من الحجم الصغير ١,٢٧٥ من الجنيه، وثمن كوب البرتقال من الحجم الكبير ٢,٦٢٥، وسوف يصبح ثمن كوب عصير المانجو من الحجم الصغير ١,٣٥ من الجنيه، وثمن كوب المانجو من الحجم الكبير ٢,٨٥ من الجنيه.

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 20 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ فأوجد −٥أ

تعلم

مدور المصفوفة Transpose of a Matrix

في أي مصفوفة أ على النظم م × ن إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م، وتسمى مدور المصفوفة أ، ويرمز لها بالرمز أ$^{\text{مد}}$ ويتضح من التعريف أن $(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}$

مثال

(٧) أوجد مدور كل من المصفوفات الآتية:

(أ) $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) ب = (١ −٢ ٦) (ج) $\text{ج} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

الحل

(أ) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

(ب) $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ مصفوفة عمود على النظم ٣ × ١

(ج) $\text{ج}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة Symmetric and Semi Symmetric Matrices

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا وفقط إذا كانت أ = أ$^{\text{مد}}$ وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت أ = −أ$^{\text{مد}}$

مثال

(٨) هل المصفوفة $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ متماثلة أم شبه متماثلة؟

الحل

$\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{\text{مد}} = -1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\text{ب}$

∴ ب$^{\text{مد}}$ = −ب فيكون ب = −ب$^{\text{مد}}$ فتكون المصفوفة ب شبه متماثلة

حاول أن تحل

(١٣) هل المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ متماثلة أم شبه متماثلة؟

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة كل من س، ص، ع في كل مما يأتى:

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{س} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \text{ع} & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(٢) بين أيًّا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة:

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

نشاط

الربط بالتكنولوجيا: استخدام الجداول الإلكترونية في تنظيم البيانات

الأدوات المستخدمة: برنامج الجداول الإلكترونية(Excel)

استخدم الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة مثل المصفوفات، بعد ذلك يمكنك استخدامها في عمل الرسوم أو إيجاد الحسابات.

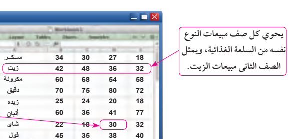
مثال

(١٠) الربط بالتجارة: جمع مدير سوبر ماركت مبيعاته من السلع الغذائية بالكيلو جرام في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المقابل، أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.

مبيعات السوبر ماركت من بعض السلع الغذائية بالكيلو جرامات خلال ٤ أسابيع متتالية

النوع	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
سكر	٣٤	٣٠	٢٧	١٨
زيت	٤٢	٤٨	٣٦	٣٢
مكرونة	٦٠	٦٢	٥٤	٥٨
دقيق	٧٠	٧٥	٨٠	٧٢
زبدة	٢٥	٢٤	٢٠	١٨
ألبان	٦٠	٣٦	٤١	٧٧
شاي	٢٢	١٨	٣٠	٣٢
فول	٤٥	٣٥	٣٨	٤٠

١- استخدم العمود A للنوع والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثانى، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



حاول أن تحل

(١٤) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في مصفوفة.

(١٥) عند استخدامك للأمر (sum) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية. يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف من ١ إلى ٨ بإدخال الصيغة sum (F1:F8) = ماذا تمثل هذه المجاميع؟

(١٦) اختر إحدى المسائل التي درستها في هذا الدرس، وتحقق من صحة إجاباتك باستخدام الجداول الإلكترونية (يمكنك استخدام برنامج (EXCEL)).

(١٧) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستخدام بيانات حياتية تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها لها معنى أيضًا، أدخل بيانات المصفوفة على برنامج الجداول الإلكترونية، وتحقق من صحة المجاميع التى حصلت عليها، ثم فسر ماذا تعنى مجاميع كل من الأعمدة والصفوف.

ب اجمع عناصر كل عمود، ما تفسيرك للنتائج التى حصلت عليها؟

....

جـ اجمع عناصر كل صف. هل النتائج التى حصلت عليها يمكن أن تزودنا ببيانات ذات معنى؟ فسر إجابتك.

....

(٥) أوجد قيمة كل من أ، ب إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٢أ-١ & ٣ب+١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$

....

(٦) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ء & ١- \\ ٣هـ & ٤ \end{pmatrix}$ حيث أ = ب^{مد}

فأوجد قيمة كل من ء ، هـ.

....

(٧) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣- \\ ٤ & ٥ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢- \\ ٢- & ٣ & ٣ \\ ٤- & ٥- & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ − ب ، أ + ٢ب ، ب − ٣أ

(٨) تفكير ناقد: إذا كانت أ = (أ$_{س ص}$) لكل س، ص ∈{ ١، ٢، ٣} اكتب المصفوفة أ إذا علم أن أ$_{س ص}$ = ص − س، ثم أوجد أ^{مد}

....

نشاط

أنشئ مصفوفة باستخدام بيانات حياتية تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليس لها معنى. أدخل بيانات المصفوفة على برنامج الجداول الإلكترونية وتحقق من صحة المجاميع التى حصلت عليها، ثم فسر ماذا تعنى مجاميع الأعمدة.

....

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، ويحصل على إجابات صحيحة
جيد جدًّا ٨ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، ويحصل على إجابات صحيحة بمساعدة بسيطة من المعلم.
جيد ٧ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، ويحصل على إجابات ولكن بها بعض الأخطاء.
مقبول ٥ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، ويحصل على إجابات بها أخطاء متعددة ويحتاج بعض المساعدة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لايستطيع الطالب تنفيذ ما هو مطلوب منه ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

التقييم

اطلب إلى طلابك حل المسائل التالية:

(١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٣ & ١- & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد

أ) أ$_{١١}$ ب) أ$_{٢٢}$ ج) أ$_{٣١}$ د) أ$_{٣٢}$ هـ) ٢أ^{مد}

(٢) أ) اكتب من عندك مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢

ب) إذا كان $\begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ فما قيمة أ؟

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط (٣) صفحة (٣)

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، مع تقديم التفسير المطلوب.
جيد جدًّا ٨ درجات	يقوم الطالب بأداء ما هو مطلوب منه، مع تقديم التفسير المطلوب بتوجيه بسيط من المعلم.
جيد ٧ درجات	يقوم الطالب باداء ما هو مطلوب منه، ولكنه يحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم لتقديم التفسير المطلوب
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب أداء ما هو مطلوب منه، إلا أنه يحتاج لمساعدة وتوجيه من قبل المعلم، كذلك لا يستطيع الطالب بمفردة تقديم التفسير المطلوب.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب أداء ما هو مطلوب منه، ويحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

١ - ٢

جمع وطرح المصفوفات

Adding and Subtracting Matrices

خلفية

درس الطالب كيفية تنظيم البيانات فى مصفوفات وبعض المصفوفات الخاصة ومدور المصفوفة، ومتى تكون المصفوفة متماثلة أو شبه متماثلة. والآن سوف يدرس جمع وطرح المصفوفات.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يجمع المصفوفات.
- يستنتج خواص جمع المصفوفات.
- يطرح المصفوفات.

مفردات أساسية

جمع المصفوفات – طرح المصفوفات

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – آلة حاسبة بيانية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – التعلم التعاونى

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٤ إلى صفحة ١٧

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٤

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

إجراءات الدرس

التمهيد

عمل تعاوني

تأكد من تذكر الطلاب لمفهوم المتوسط (الوسط الحسابى)

فى السؤال رقم (١)

وضح لطلابك أن عليهم إيجاد مجموع الوسطين الحسابيين للذكور لكل سنة من سنة ٢٠١٠ إلى سنة ٢٠١٣م وكذلك للإناث

---

١ - ٢ جمع وطرح المصفوفات

Adding and subtracting Matrices

سوف تتعلم

- جمع المصفوفات.
- طرح المصفوفات.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جمع المصفوفات Adding matrices
- طرح المصفوفات Subtracting matrices

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية

عمل تعاونى

الربط بالإحصاء: اعمل مع زميل لك . استخدم المعلومات في الجدول التالي:

الوسط الحسابى للدرجات				
	علوم		رياضيات	
السنة	ذكور	إناث	ذكور	إناث
٢٠١١	٤٢٨	٤٢٠	٥٠٢	٤٥٧
٢٠١٢	٤٢٥	٤٢١	٥٠١	٤٦٠
٢٠١٣	٤٢٩	٤٢٦	٥٠٣	٤٦٣

١- أ) أوجد مجموع درجات الوسطين الحسابيين للذكور في كل سنة في الجدول.
ب) أوجد مجموع درجات الوسطين الحسابيين للإناث في كل سنة في الجدول.

٢- أ) اكتب مصفوفة تمثل الوسط الحسابي لدرجات مادة العلوم للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها.
ب) ما نظم المصفوفة؟

٣- أ) اكتب مصفوفة تمثل الوسط الحسابى لدرجات الرياضيات للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها.
ب) ما نظم المصفوفة ؟

٤- بفحص إجابتك عن السؤال رقم (١) والمصفوفات التى كتبتها في السؤالين (٢)، (٣)، اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع درجات الوسطين الحسابيين للذكور والإناث. ضع عنوانًا للمصفوفة وصفوفها وأعمدتها، ما نظم المصفوفة؟

٥- استخدم ملاحظاتك، وأى أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

تعلم جمع المصفوفات Adding Matrices

نريد أحيانا ان نجمع أو نطرح مصفوفات، لكى نحصل على معلومات جديدة. لتحصل على مصفوفة الجمع، اجمع العناصر المتناظرة.

أى أن: إذا كانت أ، ب مصفوفتين على النظم م × ن، فإن أ + ب هى مصفوفة أيضًا على النظم م × ن ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في أ، ب.

١٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

الأسئلة من (٢–٤)

اطلب إلى الطلاب الاحتفاظ بالدرجات التى حققها كل من الذكور والإناث فى مصفوفات منفصلة.

السؤال رقم (٤)

قد يحتاج الطلاب إلى تعرف الصلة بين إجابة السؤال رقم (١) والمصفوفات التى تم تكوينها عند الإجابة عن السؤالين رقمى ٢، ٣، اطلب إليهم تدوين كيفية التوصل لإجابات السؤال رقم (١)، ثم اطلب إليهم مقارنة الدرجات التى قاموا بجمعها فى السؤال رقم (١)، بالدرجات فى كلتا المصفوفتين.

عرض الدرس

تعلم: جمع المصفوفات

ناقش مع طلابك جمع المصفوفات، وأكد على أنه لجمع مصفوفتين أ، ب على النظم م × ن فإن أ + ب هى مصفوفة أيضًا على النظم م × ن، ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين فى أ، ب.

يمكنك أن تطلب إلى طلابك جمع مصفوفتين لهما أبعاد مختلفة، لكى يلاحظوا المشاكل التى يمكن أن يواجهوها أثناء الحل.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٥)

(١) أ) أ + ب = $\begin{pmatrix} -٢ & -٨ \\ ٥ & -٨ \end{pmatrix}$ ب) أ + جـ غير ممكن.

انتقل إلى خواص جمع المصفوفات، ودع طلابك يستنتجوا خواص عملية الجمع مستعينًا بما ورد فى صفحة (١٥) من كتاب الطالب.

تعلم طرح المصفوفات

وضح لطلابك أن طرح مصفوفتين أ، ب يعنى إضافة المعكوس الجمعى للمصفوفة ب للمصفوفة أ. دع طلابك يستنتجوا أن عملية الطرح ليست عملية إبدالية أو دامجة مستعينًا بما ورد فى صفحة (١٦) من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٦)

(٢) ٢أ – ٣ب + ٤ج =

$$٢\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ -٦ & ٢ \end{pmatrix} + ٤\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٦ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & -١٢ \\ -١٨ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & -١٢ \\ ٠ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & -٢٦ \\ -٢٤ & ٢٨ \end{pmatrix}$$

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

(١) أ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٣ & -٣ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ٦ & -٧ \\ -٥ & ٥ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) أ) أ – ب =

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$$

ب – أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & -١ & ٢ \\ -٤ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$

أ – ب ≠ ب – أ

ب) –(أ + ب) = $-\left[\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}\right]$

$$= -\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٤ \\ ٤ & ٧ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & -٥ & ٤ \\ -٤ & -٧ & -١ \end{pmatrix}$$

(–أ) + (–ب) = $\begin{pmatrix} -٢ & -٣ & ١ \\ -٤ & -٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -٣ & -٥ & ٤ \\ -٤ & -٧ & -١ \end{pmatrix}$$

–(أ + ب) = (–أ) + (–ب)

مثال

(١) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ فأوجد: أ + ب.

الحل

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ (بالتعويض عن أ، ب)

= $\begin{pmatrix} ٠+٧ & ٢+(-٢) \\ -١+١ & ٣+(-٤) \end{pmatrix}$ (بجمع العناصر المتناظرة)

= $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (بسط)

حاول أن تحل

(١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ -٣ & -٧ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ٨ & -١ \end{pmatrix}$، جـ = $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$ أوجد كلاً ممايأتي إن أمكن:

أ) أ + ب ب) أ + جـ

تعلم

خواص جمع المصفوفات Properties of Adding Matrices

نفرض أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن ▭ مصفوفة صفرية على نفس النظم فإن:

١- خاصية الإنغلاق: أ + ب تكون مصفوفة على النظم م × ن

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢، ب = $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

فإن أ + ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٢

٢- خاصية الإبدال: أ + ب = ب + أ

والآن: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ فبين أن أ + ب = ب + أ

٣- خاصية الدمج: (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

والآن: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٣ \end{pmatrix}$ فبين أن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤- خاصية المحايد الجمعى: أ + ▭ = ▭ + أ = أ

فمثلاً: $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & -٥ & ٤ \\ ٧ & ٨ & -٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & -٥ & ٤ \\ ٧ & ٨ & -٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & -٥ & ٤ \\ ٧ & ٨ & -٩ \end{pmatrix}$

٥- خاصية المعكوس (النظير)الجمعي: أ + (–أ) = (–أ) + أ = ▭

حيث (–أ) النظير الجمعى للمصفوفة أ

فمثلاً $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & -٥ & -٢ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ حيث $\begin{pmatrix} -٣ & -٥ & -٢ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{pmatrix}$

تعلم

طرح المصفوفات

إذا كانت كل من المصفوفتين أ، ب على النظم م × ن فإن المصفوفة ج = أ – ب = أ + (–ب) حيث ج مصفوفة علي النظم م × ن ، (–ب) هى معكوس للمصفوفة ب بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

فمثلاً: $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -س & -ص \\ -ع & -ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ-س & ب-ص \\ جـ-ع & د-ل \end{pmatrix}$

مثال

(٢) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن أ – ب ≠ ب – أ.

الحل

أ – ب = $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٥ & -٩ & -٢ \\ -٨ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢ & -١٣ & ٩ \\ -٢ & -٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (١)

ب – أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ & ٢ \\ ٨ & -٧ & -٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٧ & ٤ & -١١ \\ -٦ & -٥ & ١ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٢ & ١٣ & -٩ \\ ٢ & -١٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١)، (٢) نلاحظ أن: أ – ب ≠ ب – أ (عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية)

فكر: هل عملية طرح المصفوفات دامجة؟

مثال

(٣) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix} ٦ & -١ & -٢ \\ -٣ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة ٢أ – ٣ب + ٥ج

الحل

٢أ = ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢×٢ & ٢×٥ & ٢×-١ \\ ٢×٣ & ٢×-٤ & ٢×٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٢ \\ ٦ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

٣ب = ٣ $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣×-١ & ٣×٤ & ٣×٣ \\ ٣×٩ & ٣×-٢ & ٣×٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ١٢ & ٩ \\ ٢٧ & -٦ & ١٥ \end{pmatrix}$

–٣ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١٢ & -٩ \\ -٢٧ & ٦ & -١٥ \end{pmatrix}$

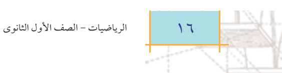
٥ج = ٥ $\begin{pmatrix} ٦ & -١ & -٢ \\ -٣ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥×٦ & ٥×-١ & ٥×-٢ \\ ٥×-٣ & ٥×٥ & ٥×٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٠ & -٥ & -١٠ \\ -١٥ & ٢٥ & ٢٠ \end{pmatrix}$

∴ ٢أ – ٣ب + ٥ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٢ \\ ٦ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & -١٢ & -٩ \\ -٢٧ & ٦ & -١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٠ & -٥ & -١٠ \\ -١٥ & ٢٥ & ٢٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٤+٣+٣٠ & ١٠-١٢-٥ & -٢-٩-١٠ \\ ٦-٢٧-١٥ & -٨+٦+٢٥ & ١٢-١٥+٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٧ & -٧ & -٢١ \\ -٣٦ & ٢٣ & ١٧ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ٢أ – ٣ب + ٤ج



نشاط الربط بالتكنولوجيا

إجابات النشاط ص ١٧

(٣) الترتيب لايؤثر على جمع المصفوفات، ولكن يؤثر على طرح المصفوفات.

تقييم النشاط

التقدير	الأداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يستخدم الطالب الآلة الحاسبة بكفاءة لإجراء جمع أو طرح المصفوفات ويجيب عن السؤال المطروح إجابات صحيحة.
جيد جدًّا ٨ درجات	يستخدم الطالب الاله الحاسبه البيانية بكفاءة لإجراء جمع أو طرح المصفوفات، ولكنه يحتاج لمساعدة طفيفة للإجابة عن السؤال المطروح.
جيد ٧ درجات	يستخدم الطالب الآلة الحاسبة البيانية بطريقة صحيحة لجمع أو طرح المصفوفات ولكنه يحتاج لمساعدة للإجابة عن السؤال المطروح.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب استخدام الآلة الحاسبة البيانية ولكنه يحتاج لمساعدة لإجراء جمع أو طرح المصفوفات والإجابة عن السؤال المطروح.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب استخدام الآلة الحاسبة البيانية ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة كل ممايأتي:

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٣ & ٣ \\ ٤ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

أ أوجد ا − ب ، ب − ا . ماذا تلاحظ؟

ب تحقق من أن − (ا + ب) = (−ا) + (−ب)

نشاط

الربط بالتكنولوجيا: يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لجمع أو طرح المصفوفات، على الآلة الحاسبة تسمى المصفوفة باستخدام متغير، بعض الآلات الحاسبة تضع أقواس [ ] حول المتغير لتوضيح المصفوفة، قبل إدخال القيم للمصفوفة، يجب أن تدخل نظم المصفوفة

تذكر: تذكر أن [A]، [B] يمكن جمعها وطرحها لأنهما على نفس النظم ٣ × ٢

[A] = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ [B] = $\begin{bmatrix} ٦ & ٩ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

تتابع المفاتيح الموضح أدناه هو لإدخال وجمع مصفوفتين، إجر كل الخطوات للمصفوفة A، ثم للمصفوفة B

	مصفوفة [A]	مصفوفة [B]
لإضافة مصفوفة ←	MATRX ▶ ▶ 1	MATRX ▶ ▶ 2
لإدخال نظم المصفوفة ←	2 ENTER 3 ENTER	2 ENTER 3 ENTER
لإدخال القيم في الصف الأول ←	1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER	6 ENTER 9 ENTER 2 ENTER
لإدخال القيم في الصف الثاني ←	4 ENTER 5 ENTER 6 ENTER	(-) 1 ENTER 4 ENTER (-) 7 ENTER
للذهاب إلى (home screen) ←	2ND QUIT	2ND QUIT

لجمع [A]، [B] ← MATRX 1 + MATRX 2 ENTER

سوف تعرض الآلة الحاسبة مجموع المصفوفتين ← [A] + [B] [[7 11 5] [3 9 -1]]

١- والآن: استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد: [A] + [B]، [A] − [B]

أ [A] = $\begin{bmatrix} ٣,٨ & ٢,١ \\ ١,٥ & -٠,٨ \\ -١,٤ & ١,٩ \end{bmatrix}$ ، [B] = $\begin{bmatrix} ١,١ & -١,٤ \\ ٠,٦ & ٠,١ \\ -١,٧ & ٠,٨ \end{bmatrix}$

ب [A] = $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ & ٧ \\ ٤ & -٩ & -١٠ \\ ٦ & -٧ & -٦ \end{bmatrix}$ ، [B] = $\begin{bmatrix} -٥ & ٨ & ١٣ \\ ٤ & ١١ & ٧ \\ -١٥ & ٦ & -٨ \end{bmatrix}$

٢- هل التغيير في ترتيب المصفوفات يؤثر على الناتج عند جمع المصفوفات؟ وعند طرح المصفوفات؟ فسر إجابتك.

١ - ٢ جمع وطرح المصفوفات

Adding and subtracting Matrices

① إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ & -١ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ وكانت $ك_١ = ٢$ ، $ك_٢ = -١$ فأوجد كلًّا من المصفوفات الآتية: $ك_١$أ، $ك_٢$أ

② إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -٧ & ٠ & -٥ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \\ -٦ & -٥ \end{pmatrix}$ فأوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكن، مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية

أ) أ + ب   ب) أ + $ب^{مد}$ جـ) $أ^{مد}$ + ب

③ إذا كان س = $\begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$، ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$، ع = $\begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -٣ & ٢ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ٣ س − ص + ع

④ إذا كان: أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ & -٦ \\ ٢ & -٤ & ٨ \\ ٦ & ١٢ & ٠ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ ٤ & -١٠ & ٠ \\ -١ & ٨ & -٤ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث : س = ٢أ − ٣ب

⑤ تفكير ناقد: أوجد قيم أ، ب، جـ، ء التى تحقق المعادلة:

$٢\begin{pmatrix} أ & ٣ \\ ٦ & ب \end{pmatrix} = ٣\begin{pmatrix} أ & ء \\ جـ & -٢ \end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix} جـ & ٣ \\ ٠ & أ \end{pmatrix}$

⑥ مسألة مفتوحة: اختر من عندك مصفوفتين أ، ب لهما نفس النظم ، ثم أثبت أن :

أ) أ − ب = أ + (−ب)   ب) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ جـ) $(أ - ب)^{مد} = أ^{مد} - ب^{مد}$

نشاط

① اكتب مسألة حياتية من عندك يمكن حلها باستخدام جمع أو طرح المصفوفات.

② ابحث فى مكتبتك المدرسية أو على الشبكة الدولية للإنترنت تطبيقات المصفوفات فى العلوم الأخرى.

٤   الرياضيات – الصف الأول الثانوى



تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط (١) صفحة (٤)

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يكتب الطالب مسألة جيدة يمكن حلها باستخدام جمع أو طرح المصفوفات.
جيد جدًّا ٨ درجات	بمساعدة بسيطة من المعلم يستطيع الطالب كتابة مسألة يمكن حلها باستخدام جمع أو طرح المصفوفات.
جيد ٧ درجات	يحتاج الطالب مساعدة من المعلم حتى يستطيع كتابة مسألة يمكن حلها باستخدام جمع أو طرح المصفوفات.
مقبول ٥ درجات	يحتاج الطالب مساعدة كبيرة من المعلم حتى يستطيع كتابة مسألة يمكن حلها باستخدام جمع أو طرح المصفوفات
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب كتابة المسألة ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

نشاط (٢) صفحة (٤)

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يكتب الطالب تقريرًا ممتازًا عن تطبيقات متنوعة للمصفوفات فى العلوم الأخرى.
جيد جدًّا ٨ درجات	يكتب الطالب تقريرًا جيدًا عن بعض تطبيقات المصفوفات فى العلوم الأخرى
جيد ٧ درجات	يكتب الطالب بمساعدة المعلم تقريرًا عن بعض تطبيقات المصفوفات فى العلوم الأخرى
مقبول ٥ درجات	يكتب الطالب بمساعدة كبيرة من المعلم تقريرًا عن بعض تطبيقات المصفوفات فى العلوم الأخرى.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب البحث وكتابة التقرير المطلوب، ويحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

التقييم

اطلب إلى طلابك إيجاد قيمة ما يأتى:

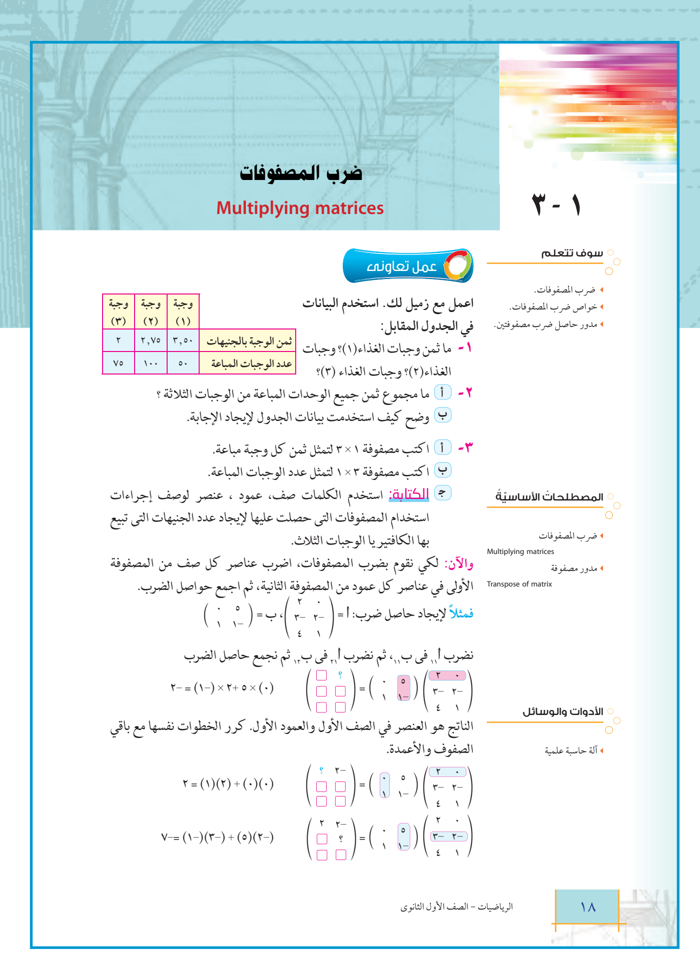
إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

فأوجد $٢أ^{مد} + ٣ب$ ، $٥أ - ب^{مد}$

١ - ٣

ضرب المصفوفات

Matrix Multiplication



١ - ٣

ضرب المصفوفات

Multiplying matrices

سوف تتعلم

- ضرب المصفوفات.
- خواص ضرب المصفوفات.
- مدور حاصل ضرب مصفوفتين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- ضرب المصفوفات Multiplying matrices
- مدور مصفوفة Transpose of matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول المقابل:

	وجبة (١)	وجبة (٢)	وجبة (٣)
ثمن الوجبة بالجنيهات	٣,٥٠	٢,٧٥	٢
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

١- ما ثمن وجبات الغذاء(١)؟ وجبات الغذاء(٢)؟ وجبات الغذاء (٣)؟

٢- أ ما مجموع ثمن جميع الوحدات المباعة من الوجبات الثلاثة ؟

ب وضح كيف استخدمت بيانات الجدول لإيجاد الإجابة.

٣- أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.

ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.

ج **الكتابة:** استخدم الكلمات صف، عمود ، عنصر لوصف إجراءات استخدام المصفوفات التى حصلت عليها لإيجاد عدد الجنيهات التى تبيع بها الكافتيريا الوجبات الثلاث.

والآن: لكي نقوم بضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية، ثم اجمع حواصل الضرب.

فمثلاً لإيجاد حاصل ضرب: أ = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

نضرب $أ_{11}$ فى $ب_{11}$، ثم نضرب $أ_{21}$ فى $ب_{12}$ ثم نجمع حاصل الضرب

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ $(0) \times 5 + 2 \times (-1) = -2$

الناتج هو العنصر في الصف الأول والعمود الأول. كرر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & ? \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ $(0)(0) + (2)(1) = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ ? & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ $(-2)(5) + (-3)(-1) = -7$

١٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

خلفية

درس الطالب مفهوم المصفوفة وكيفية تنظيم البيانات فى مصفوفات، وجمع وطرح المصفوفات، وفي هذا الدرس سوف يتعلم ضرب المصفوفات.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يضرب المصفوفات.
- يستنتج خواص ضرب المصفوفات.

مفردات أساسية

ضرب المصفوفات – مدور مصفوفة.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمة – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – ألوان رصاص.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٨ إلى صفحة ٢١

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥ إلى صفحة ٦.

إجراءات الدرس

التمهيد

عمل تعاوني

- اطلب إلى طلابك القيام بالعمل التعاونى الموضح فى صفحة (١٨) من كتاب الطالب.

السؤال رقم ٢(أ): اطلب إلى طلابك إيجاد مجموع ثمن المبيعات الناتجة عن بيع كل وحدات الغذاء من كل من الوجبات الثلاثة.

السؤال رقم (٣): اطلب إلى طلابك تسمية المصفوفة الأولى أ، وتسمية المصفوفة الثانية ب، ويمكنهم الرجوع إلى عناصر المصفوفة باستخدام الحروف أ، ب. وشجعهم على كتابة قانون للمجموع الكلى باستخدام الحروف التى تمثل العناصر. بعد هذا النشاط، اطلب إلى طلابك تعميم هذه الطريقة فى توضيح كيفية ضرب المصفوفات. ناقش مع طلابك كيفية ضرب مصفوفتين متبعًا الخطوات الموضحة.

إجابات عمل تعاونى للبنود (١)، (٢)، (٣)

(١) ١٧٥ جنيه؛ ٢٧٥ جنيهًا، ١٥٠ جنيهًا

(٢) أ ٦٠٠ جنيهًا

ب إجابات متنوعة؛ كمثال: اضرب عدد الوجبات المباعة من كل وجبة فى ثمن الوجبة، ثم أوجد المجموع.

(٣) أ (٣,٥٠ ٢,٧٥ ٢)

ب وجبة (١) ٥٠، وجبة (٢) ١٠٠، وجبة (٣) ٧٥ (مصفوفة عمودية)

ج إجابات متنوعة.

- أشر إلى طلابك إلى أن هاتين المصفوفتين مختلفتين الأبعاد، اجعلهم يقوموا بتغطية كل الصفوف والأعمدة إلا تلك التى يعملون بها فى كل خطوة، وسوف يساعدهم هذا على تجنب الخطأ، وعدم الخلط بين عناصر المصفوفة.

التعلم السمعى

اختر عشرة طلاب لعرض العناصر العشرة فى المصفوفتين، اذكر لكل طالب الرقم والعنصر الذى يمثله، اجعل الطلاب يقفوا فى منتصف الفصل فى شكل شبكه حسب ترتيب رقم كل منهم بالمصفوفتين الموضحتين فى هذا البند، اجعل باقى الطلاب يقفوا حولهم لكى يستطيعوا رؤية تطور ترتيبهم فى كل خطوة من الخطوات. قم بكل خطوة فى هذا البند، وذلك بالطلب إلى كل زوج من الطلاب أن يحسب الناتج الخاص به. اكتب كل خطوة وناتجها على السبورة، كما حسبها الطلاب.

إجابات البنود (٤)، (٥) من عمل تعاونى

(٤) إجابات متنوعة

(٥) (أ) ٣ × ٢، ٢ × ٢؛ ٣ × ٢

(ب) عدد صفوف مصفوفة الضرب هى عدد صفوف المصفوفة الأولى، وعدد أعمدة مصفوفة الضرب هي عدد أعمدة المصفوفة الثانية، ونلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية حتى يمكن إجراء عملية الضرب.

عرض الدرس

تعلم: ضرب المصفوفات

أكد على أنه يمكن ضرب مصفوفتين إذًا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية، وعند ضرب المصفوفة أ على النظم م × ن بالمصفوفة ب من النظم ن × ل فإن الناتج هو مصفوفة أ ب على النظم م × ل وأن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

التقييم المستمر

إجابات حاول ان تحل صفحة (١٩)

(١) (أ) معرفة، وتكون مصفوفة حاصل الضرب على النظم ٣ × ٣

(ب) غير معرفة.

أخطاء متوقعة

يمكن أن يخطئ الطلاب عند إجراء عملية الضرب، وذلك أثناء محاولتهم تخطى بعض الخطوات، أو إنجاز الحل بشكل سريع جدًّا.

(٢–)(٠) + (٣–)(١) = ٣–

(١)(٠)+(٤)(١)=٤

(١)(٥) + (٤)(١–) = ١

٤- صف نموذجًا للصفوف والأعمدة الملونة.

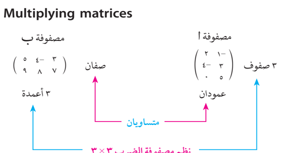
٥- (أ) ما نظم المصفوفات الأصلية في المثال السابق، ومانظم مصفوفة الضرب؟

(ب) تفكير ناقد: كيف نقارن نظم مصفوفة الضرب بنظم المصفوفات الأصلية؟

تعلم

ضرب المصفوفات **Multiplying matrices**

يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية، وعند ضرب المصفوفة أ على النظم م × ن بالمصفوفة ب على النظم ن × ل فإن الناتج هو المصفوفة أ ب على النظم م × ل فمثلاً:



مثال

(١) حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة في كل حالة أم لا.

(أ) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٣ × ٤، والمصفوفة ب من النظم ٤ × ٢

(ب) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٥ × ٣، والمصفوفة ب من النظم ٥ × ٢

الحل

(أ) بما أن عدد أعمدة المصفوفة أ يساوى عدد صفوف المصفوفة ب، فإن مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة وتكون على النظم ٣ × ٢

(ب) بما أن عدد أعمدة المصفوفة أ لايساوى عدد صفوف المصفوفة ب، فإن مصفوفة حاصل الضرب أ ب غير معرفة.

حاول أن تحل

(١) حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أ ب معرفة في كل حالة أم لا موضحًا السبب.

(أ) إذا كانت المصفوفة أ من النظم ٣ × ٢، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٣

(ب) إذا كانت المصفوفة أ من النظم ١ × ٣ والمصفوفة ب على النظم ١ × ٣

من تعريف ضرب المصفوفات يتضح إنه من الممكن أن تكون أ ب معرفة بينما ب أ غير معرفة، وبصفة عامة إذا كانت كل من أ ب، ب أ معرفتين فإن أ ب ليست بالضرورة تساوى ب أ حتى وإن تساويتا في نفس النظم.

مثال

② إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأوجد كلاً من أ ب ، ب أ. ماذا تلاحظ؟

الحل

∵ أ على النظم ٣ × ٣، ب على النظم ٣ × ٣ فإن أ ب معرفة (لأن عدد أعمدة أ يساوى عدد صفوف ب) وتكون مصفوفة حاصل الضرب على النظم ٣ × ٣

$$أ ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١×٢ + (-١)×٣ + ٢×٥ & ١×١ + (-١)×٤ + ٢×٠ & ١×٠ + (-١)×١ + ٢×(-١) \\ -١×٢ + ٠×٣ + ٣×٥ & -١×١ + ٠×٤ + ٣×٠ & -١×٠ + ٠×١ + ٣×(-١) \\ ٠×٢ + ١×٣ + ٤×٥ & ٠×١ + ١×٤ + ٤×٠ & ٠×٠ + ١×١ + ٤×(-١) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ & -٣ \\ ١٣ & -١ & -٣ \\ ٢٣ & ٤ & -٣ \end{pmatrix}$$

∵ ب على النظم ٣ × ٣ أ على النظم ٣ × ٣ فإن ب أ معرفة (لأن عدد أعمدة ب يساوى عدد صفوف أ) وتكون مصفوفة حاصل الضرب على النظم ٣ × ٣

$$ب أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢×١ + ١×-١ + ٠×٠ & ٢×-١ + ١×٠ + ٠×١ & ٢×٢ + ١×٣ + ٠×٤ \\ ٣×١ + ٤×-١ + ١×٠ & ٣×-١ + ٤×٠ + ١×١ & ٣×٢ + ٤×٣ + ١×٤ \\ ٥×١ + ٠×-١ + (-١)×٠ & ٥×-١ + ٠×٠ + ١×٠ & ٥×٢ + ٠×٣ + -١×٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٧ \\ -١ & -٣ & ٢٢ \\ ٥ & -٥ & ٦ \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن أ ب ≠ ب أ يمكن استخدام ضرب المصفوفات في بعض المواقف الحياتية.

مثال

③ الربط بالسياحة: لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة في كل فندق، فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التى تحتوى على سرير واحد ٢٥٠ جنيهًا، وللغرفة التى تحتوي على سريرين ٤٥٠ جنيهًا، وللجناح ٦٠٠ جنيهًا.

الفندق	غرفة بسرير	غرفة بسريرين	جناح
الزهرة	٢٨	٦٤	٨
اللؤلؤة	٣٥	٩٥	٢٠
الماسة	٢٠	٨٠	١٥

أ اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة في الثلاثة فنادق، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

ب اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للشركة، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.

ج ما الدخل اليومى للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها؟

الحل

أ نكتب مصفوفة عدد الغرف أ كالآتي: $أ = \begin{pmatrix} ٢٨ & ٦٤ & ٨ \\ ٣٥ & ٩٥ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٨٠ & ١٥ \end{pmatrix}$

وتكتب مصفوفة أسعار الغرف ب كالآتى $ب = \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أننا قد كتبنا المصفوفتين بحيث يكون عدد الصفوف في المصفوفة أ مساويًا لعدد الأعمدة في المصفوفة ب، حتى يمكن إجراء عملية الضرب ، إيجاد المطلوب في البندين (ب)، (جـ).

٢٠ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

مقترحات للعلاج

- أكد على الطلاب أن عملية ضرب المصفوفات عملية معقدة، وتحتاج إلى العديد من الخطوات، شجعهم على العمل بدقة وحذر، اقترح عليهم أن يقوم كل منهم بكتابة كل ناتج، ثم إجراء علمية الجمع، لأن هذا أفضل من الجمع ذهنيًّا.
- ارسم أشكال المصفوفات التى يمكن ضربها، والتى لايمكن ضربها فى بعضها البعض، ثم اطلب إليهم صياغة بعض العبارات أو الجمل التى قد تساعدهم على تذكر كيفية ضرب مصفوفتين من حيث قابليتهما إمكانية ضربهما.
- ادع الطلاب إلى محاولة ضرب مصفوفتين غير قابلتين للضرب فى بعضهما، ودعهم يصفوا ماذا يحدث عند إجراء عملية الضرب.
- أكد لطلابك أن معرفتهم ما إذا كانت المصفوفتان تصلحان لأن يتم الضرب بينهما أم لا، سيوفر عليهم الكثير من الوقت.

التقييم المستمر

- اطلب إلى طلابك حل السؤال التالى:

اشترى كريم من أحد المكتبات ١٠ أسطوانات مدمجة، ٦ أقلام جافة، ٤ أقلام رصاص، واشترى زميله سامى ١٨ أسطوانة مدمجة، ١٥ قلم جاف، ٣ أقلام رصاص من نفس الأنواع التى اشتراها كريم، وكان سعر البيع هو جنيهان للأسطوانه المدمجة، ١,٥٠ من الجنيه للقلم الجاف، ٠,٧٥ من الجنيه للقلم الرصاص.

أ اكتب مصفوفة تمثل مشتريات كريم وسامى، ثم اكتب مصفوفة توضح أسعار كل سلعة ثم شراؤها.

ب اكتب مصفوفة توضح المبالغ التى دفعها كل من كريم وسامى ثمنًا لمشترواتهم.

ج ما المبلغ الذى دفعه كل من كريم وسامى ثمنًا لمشتراواتهم؟

إجابات التقييم المستمر

	أسطوانات مدمجة	أقلام جاف	أقلام رصاص
كريم	١٠	٦	٤
سامي	٨	٥	٣

سعر الاسطوانه	٢
سعر القلم الجاف	١,٥٠
سعر القلم الرصاص	٠,٧٥

ب $\begin{pmatrix} ١٠ & ٦ & ٤ \\ ٨ & ٥ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٢ \\ ٢٥,٧٥ \end{pmatrix}$

ج ما دفعة كريم هو ٣٢ جنيهًا، وما دفعه سامى هو ٢٥,٧٥ جنيه.

خواص عملية الضرب

انتقل إلى خواص عملية الضرب ودع طلابك يستنتجوا هذه الخواص، ودعهم أيضًا يستنتجوا مدور حاصل ضرب مصفوفتين، تأكد من صحة استنتاجات طلابك مع تصحيح ما يرد من أخطاء فردية فى حينها، ثم أكد على هذه الخواص بكتابتها فى مكان ظاهر على السبورة.

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ معرفة

ب غير معرفة

التقييم

اطلب إلى طلابك حل المسائل التالية:

١ أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

لماذا حاصل ضرب ب أ لا وجود له؟

٢ إذا كان ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٢- & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، د = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٠ & ١ \\ ٢- & ١- \end{pmatrix}$

أوجد حاصل ضرب ج د ، د ج

إذ لم يكن حاصل الضرب موجودًا، فسر لماذا؟

نشاط إثرائي للطلاب المتفوقين:

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من النظم ن × ن ، م عدد صحيح موجب فإن:

$أ^{م}$ = أ × أ × أ × أ ....م من المرات وهى مصفوفة من النظم ن × ن والآن:

إذا كان: أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد $أ^{٢}$، $أ^{٣}$، $أ^{٤}$

ثم استنتج $أ^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب.

ب مصفوفة الدخل اليومى للشركة هي المصفوفة أ ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٦٤ & ٢٨ \\ ٢٠ & ٩٥ & ٣٥ \\ ١٥ & ٨٠ & ٢٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٦٠٠ \times ٨ + ٤٥٠ \times ٦٤ + ٢٥٠ \times ٢٨ \\ ٦٠٠ \times ٢٠ + ٤٥٠ \times ٩٥ + ٢٥٠ \times ٣٥ \\ ٦٠٠ \times ١٥ + ٤٥٠ \times ٨٠ + ٢٥٠ \times ٢٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤٠٦٠٠ \\ ٦٣٥٠٠ \\ ٥٠٠٠٠ \end{pmatrix}$

ج الدخل اليومى للشركة = ٤٠٦٠٠ + ٦٣٥٠٠ + ٥٠٠٠٠ = ١٥٤١٠٠ جنيه

تعلم

خواص عملية ضرب المصفوفات Properties of Matrix Multiplication

من تعريف عمليتى جمع وضرب المصفوفات، مع افتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين: يمكن استنتاج الخواص التالية:

١- خاصية الدمج: (أ ب) ج = أ (ب ج) والأن إذا كان:

أ = $\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢- & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد (أ ب) ج، أ (ب ج). ماذا تلاحظ؟ هل عملية ضرب المصفوفات دامجة؟

٢- خاصية المحايد الضربى: أ I = I أ = أ حيث I هي مصفوفة الوحدة

والآن إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ١- \end{pmatrix}$ فبرهن أن: أ I = I أ = أ حيث I هي مصفوفة الوحدة

٣- خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها. أ(ب + ج) = أ ب + أ ج ، (أ + ب) ج = أ ج + ب ج

والآن إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٣- \end{pmatrix}$

إثبت أن: أ أ(ب + ج) = أب + أج ب (ب + ج) أ = ب أ + ج أ

مدور حاصل ضرب مصفوفتين Transpose of the product of two matrices

من تعريف مدور المصفوفة وتعريف ضرب المصفوفات يمكن استنتاج الخاصية التالية: $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

والآن إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ & ١ \\ ٥ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١- & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، أثبت أن: $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب أب معرفة فى كل ممايأتي أم لا، و إذا كانت معرفة فأوجد نظم المصفوفة الناتجة:

أ المصفوفة أ على النظم ٣ × ١، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٣

ب المصفوفة أ على النظم ٣ × ٣، والمصفوفة ب على النظم ٢ × ٢

١ - ٤

المحددات

Determinants

خلفية

درس الطالب المصفوفات، والمصفوفة المربعة، والآن سوف يتعلم الطالب كيفية إيجاد محدد المصفوفة المربعة تمهيدًا لإيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة.

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
- يوجد محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة.
- يوجد محدد المصفوفة المثلثية.
- يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.
- يحل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.

مفردات أساسية

محدد – محدد الرتبة الثانية – محدد الرتبة الثالثة – قطر رئيسى للمحدد – قطر آخر للمحدد – مصفوفة المعاملات.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة .

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٢٢ إلى صفحة ٢٩

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٦ إلى صفحة ٧.

إجراءات الدرس

فكر وناقش

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش»، وتابع إجابات طلابك عن الأسئلة المطروحة مع تصحيح ما يرد من أخطاء فردية فى حينها:



١ - ٤

المحددات

Determinants

سوف تتعلم

- محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
- محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة.
- محدد المصفوفة المثلثية.
- إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات.
- حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محدد Determinant
- محدد الرتبة الثانية Second order determinant
- محدد من الرتبة الثالثة Third order determinant
- القطر الرئيسى للمحدد Principle or leading diagonal
- القطر الآخر للمحدد Other diagonal
- مصفوفة المعاملات Coefficient matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.
- ورق رسم بياني.

فكر و ناقش

١- ما المصفوفة المربعة؟

٢- اكتب مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢، ومن النظم ٣ × ٣

٣- إذا كانت أ مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢ حيث: أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة أ هو العدد المعرف كالآتي:

|أ| = ٢ × ٧ − ١ × ٥ = ١٤ − ٥ = ٩

ما محدد كل من المصفوفات التالية؟

ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$

تعلم

المحددات Determinants

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث:

أ = $\begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ| ويسمى بمحدد الرتبة الثانية، وهو العدد المعرف كالآتي:

|أ| = $\begin{vmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{vmatrix}$ = أ د − جـ ب

القطر الأخر

القطر الرئيسى

ونلاحظ أن قيمة محدد الرتبة الثانية يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحًا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال

١ أوجد قيمة كل محدد ممايلى:

أ $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ ج $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$ د $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

أ $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٤ × ٧ − ٣ × ٥ = ٢٨ − ١٥ = ١٣

ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ = ٠ × ٣ − ٧ × ٥ = ٠ − ٣٥ = −٣٥

٢٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

إجابات فكر وناقش

١ هي مصفوفة يكون عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

٢ إجابات متنوعة.

٣ |ب| = −٢ ، |ج| = ١٨

عرض الدرس

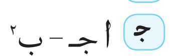
تعلم: المحددات

ناقش تعريف المحدد الموضح صفحة (٢٢) من كتاب الطالب وكيفية إيجاد قيمته مستعينًا بالأمثلة الواردة صفحتى (٢٢)، (٢٣)

التقييم المستمر

إجابات بند «حاول أن تحل» صفحة (٢٣)





محدد الدرجة الثالثة:

- أكد على أن محدد المصفوفة من النظم ٣ × ٣ يسمى بمحدد الرتبة الثالثة، ثم ناقش مع طلابك كيفية إيجاد قيمة هذا المحدد مستعينًا بالمثال الوارد صفحة (٢٥) من كتاب الطالب.
- وضح لطلابك أنه يمكن إيجاد قيمة أى محدد باستخدام عناصر أى صف أو أى عمود، وهذا ما يتطلب تحديد المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر فى مصفوفة مع اتباع قاعدة الإشارات التالية:

إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{و هـ}$ تتعين بالقاعدة $(-١)^{و+هـ}$

يمكن الاستعانة بالمثال الموضح صفحة (٢٥) من كتاب الطالب لتوضيح ذلك.

التقييم المستمر

إجابات بند «حاول ان تحل» صفحة (٢٥)

٢ أ $-٧(١٨ - ٤) = -٩٨$ ب $-٢(-١٢) = ٢٤$

ج $٣(٦) - ٤(-٩) = ٥٤$ د $-١(٦ - ٦) =$ صفر

محدد المصفوفة المثلثية:

أكد لطلابك أن المصفوفة المثلثية هى مصفوفة جميع عناصرها تحت القطر الرئيس (أو فوقه) أصفار، وأن قيمة محدد المصفوفة المثلثية يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى، استعن بالأمثلة الموضحة صفحة (٢٥) من كتاب الطالب لتوضيح ذلك.

أخطاء متوقعة

قد يخطئ الطالب فى تحديد إشارات عناصر المحدد من الرتبة الثالثة.

مقترحات للعلاج

وضح للطلاب انه يمكن كتابة محدد مدون به إشارات العناصر للاستعانة به أثناء فك المحدد وذلك كالآتى:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٦).

٣ أ $-١ \times ٣ \times -٢ = ٦$

ب $-٣ \times ٤ \times ٠ =$ صفرًا

ج $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٠ \times ٠ = ١ - ٠ = ١$

د $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ١ \times ٧ - ٢ \times ٠ = ٧ - ٢ = ٥$

حاول أن تحل

١ أوجد قيمة كل من المحددات التالية :

أ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ ج $\begin{vmatrix} أ & ب \\ ب & جـ \end{vmatrix}$

تعلم

محدد الرتبة الثالثة Third order determinant

يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة، ولإيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$ فإن:

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix} = أ\begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix} - ب\begin{vmatrix} د & و \\ ز & ط \end{vmatrix} + جـ\begin{vmatrix} د & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

$= أ(هـ ط - ح و) - ب(د ط - ز و) + جـ(د ح - ز هـ)$

مثال

٢ لإيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ فإن :

$$\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٧\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٦ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= ٧(٤ \times ٦ - ٢ \times ١) - ٢(٣ \times ٦ - (-١) \times ١) + ٥(٣ \times ٢ - (-١) \times ٤)$

$= ٧ \times ٢٢ - ٢ \times ١٩ + ٥ \times ١٠$

$= ١٥٤ - ٣٨ + ٥٠ = ١٦٦$

تعلم

المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر في مصفوفة

Minor determinant corresponding to any element of a matrix

إذا كانت المصفوفة أ هى مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث

$أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن: المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{١١}$ يرمز له بالرمز $|أ_{١١}|$ وهو $\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

ولاحظ إننا حصلنا على هذا المحدد بحذف الصف والعمود المتقاطعين على العنصر $أ_{١١}$ كالآتي:

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$$

بالمثل:

- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٢١}$ يرمز له بالرمز $|أ_{٢١}|$ وهو $\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$
- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٣١}$ يرمز له بالرمز $|أ_{٣١}|$ وهو $\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$
- المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{١٢}$ يرمز له بالرمز $|أ_{١٢}|$ وهو $\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

وهكذا، وجميع هذه المحددات هى محددات من الرتبة الثانية:

ملاحظات هامة

١- إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ ×٣ على الصورة:

$أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ ، ومحدد أ يرمز له بالرمز |أ| حيث:

$|أ| = أ_{١١}\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$

$= أ_{١١}|أ_{١١}| - أ_{٢١}|أ_{٢١}| + أ_{٣١}|أ_{٣١}|$

٢- لاحظ أننا ضربنا كل عنصر في المحدد الأصغر المناظر له مسبوقًا بالإشارات +، −، +، ... على الترتيب، و إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{و هـ}$ تتعين بالقاعدة:

إشارة $|أ_{و هـ}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{و+هـ}$

فمثلاً إشارة $|أ_{٢١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٢}$ وهى سالبة

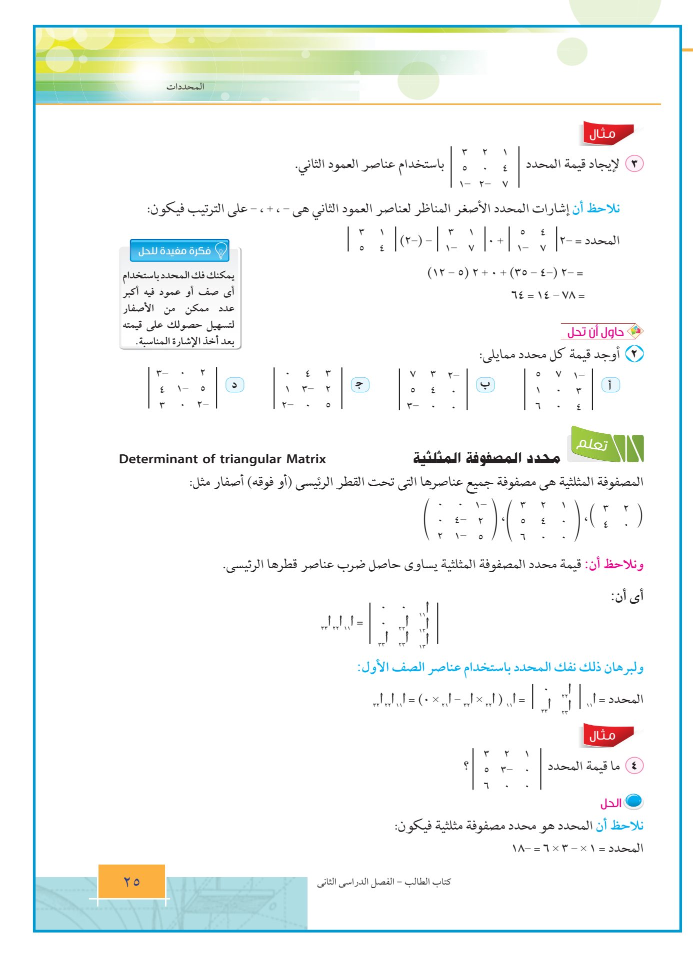
إشارة $|أ_{٣١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٣}$ وهى موجبة

بعبارة أخرى لتحديد إشارة أي محدد أصغر مناظر لعنصر ما نجمع رتبتى الصف، والعمود اللذين يتقاطعان عند هذا العنصر:

- فإذا كان مجموع الرتبتين **زوجيًا** كانت الإشارة **موجبة**.
- إذا كان مجموع الرتبتين **فرديًا** كانت الإشارة **سالبة**.

ونلاحظ أن قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر تكون كالآتى: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

٣- يمكن فك المحدد بدلالة عناصر أى صف (أو عمود) ومحدداتها الصغرى ولكن بإشارة مناسبة.



مثال

③ لإيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٧ & -٢ & -١ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثاني.

نلاحظ أن إشارات المحدد الأصغر المناظر لعناصر العمود الثاني هى − ، + ، − على الترتيب فيكون:

المحدد $= -٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & -١ \end{vmatrix} + ٠ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & -١ \end{vmatrix} - (-٢) \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

$= -٢ (-٤ - ٣٥) + ٠ + ٢ (٥ - ١٢)$

$= ٧٨ - ١٤ = ٦٤$

فكرة مفيدة للحل

يمكنك فك المحدد باستخدام أى صف أو عمود فيه أكبر عدد ممكن من الأصفار لتسهيل حصولك على قيمته بعد أخذ الإشارة المناسبة.

حاول أن تحل

② أوجد قيمة كل محدد ممايلى:

أ $\begin{vmatrix} -١ & ٧ & ٥ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} -٢ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ جـ $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$ د $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \\ -٢ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

تعلم

محدد المصفوفة المثلثية **Determinant of triangular Matrix**

المصفوفة المثلثية هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار مثل:

$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ٠ \\ ٥ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أن: قيمة محدد المصفوفة المثلثية يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

أى أن:

$\begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} أ_{٢٢} أ_{٣٣}$

ولبرهان ذلك نفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول:

المحدد $= أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} (أ_{٢٢} \times أ_{٣٣} - أ_{٢١} \times ٠) = أ_{١١} أ_{٢٢} أ_{٣٣}$

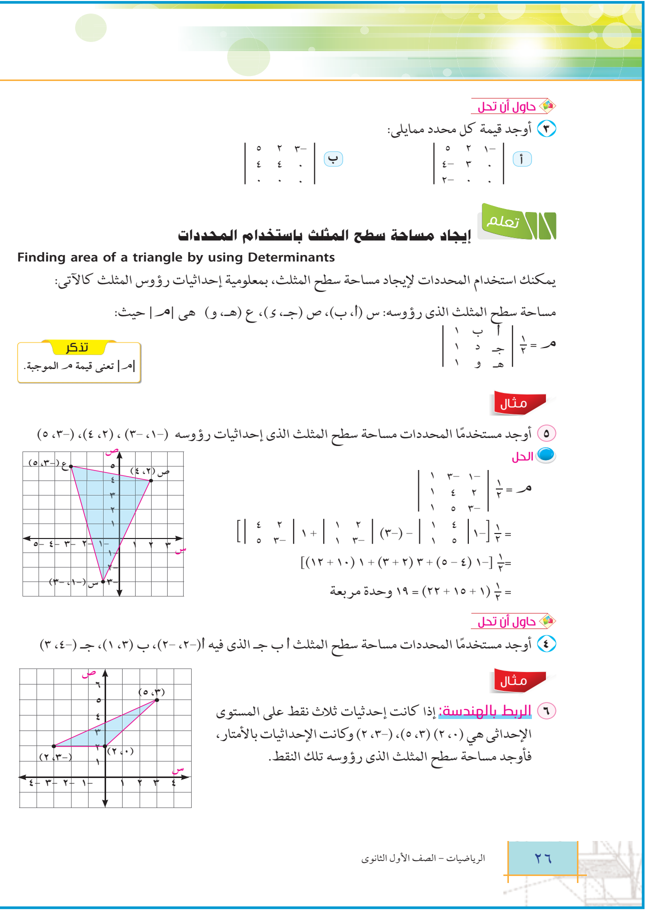
مثال

④ ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$ ؟

الحل

نلاحظ أن المحدد هو محدد مصفوفة مثلثية فيكون:

المحدد $= ١ \times -٣ \times ٦ = -١٨$


حاول أن تحل

③ أوجد قيمة كل محدد ممايلى:

أ $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٤ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

تعلم

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

Finding area of a triangle by using Determinants

يمكنك استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح المثلث، بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث كالآتى:

مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه: س (أ، ب)، ص (جـ، ى)، ع (هـ، و) هى |مـ| حيث:

$مـ = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ جـ & د & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$

تذكر

|مـ| تعنى قيمة مـ الموجبة.

مثال

⑤ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه (−١، −٣) ، (٢، ٤)، (−٣، ٥)

الحل

$مـ = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -١ & -٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ -٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

$= \frac{١}{٢} \left[-١ \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - (-٣) \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{vmatrix} \right]$

$= \frac{١}{٢} [-١ (٤ - ٥) + ٣ (٢ + ٣) + ١ (١٠ + ١٢)]$

$= \frac{١}{٢} (١ + ١٥ + ٢٢) = ١٩$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

④ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه أ(−٢، −٢)، ب (٣، ١)، جـ (−٤، ٣)

مثال

⑥ الربط بالهندسة: إذا كانت إحداثيات ثلاث نقط على المستوى الإحداثى هي (٠، ٢) (٣، ٥)، (−٣، ٢) وكانت الإحداثيات بالأمتار، فأوجد مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه تلك النقط.

إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات:

ناقش مع طلابك كيفية استخدام المحددات فى إيجاد مساحة المثلث إذا علمت إحداثيات رؤوسه مستعينًا بالأمثلة الموضحة صفحتى (٢٦)، (٢٧)

التقيم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٦)، (٢٧)

④ $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ -٤ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} (-٢(-٢) + ٢(-١) + ١(١٣))$

$= \frac{١}{٢} (١٥) = ٧\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

⑤ $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٥ & ١ & ١ \\ ٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} [-١(-٤) - ٣(٢) + ١(٢٢)]$

$\frac{١}{٢} [٤ - ٦ + ٢٢] = ١٠$ وحدات مربعة

تعلم

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

١- حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين

وضح لطلابك أنه يمكن استخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين باستخدام طريقة تسمى «طريقة كرامر». ناقش مع طلابك خطوات الحل مستعينًا بما ورد فى صفحة (٢٧)، (٢٨) من كتاب الطالب ومستعينًا بالأمثلة الواردة.

اتساع

إذا كان محدد مصفوفة المعاملات لايساوى الصفر، فإن للنظام حلًّا وحيدًا يمكن إيجاده باستخدام طريقة كرامر، أما إذا كانت قيمة المحدد صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل.

ويمكن التعرف على ذلك بفحص المعادلتين الخطيتين للنظام، فإذا كان ميل الخط الأول هو نفسه ميل الخط الثاني (أي أن الخطين متوازيان) فهذا يعني أن للنظام عدد لانهائى من الحلول.

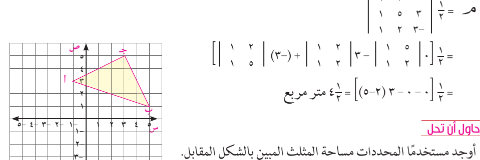
أما إذا كانت المعادلتان الخطيتان يمثلان نفس الخط فإنه يوجد عدد لانهائى من الحلول لهذا النظام.

الحل

$\text{م} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left[0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right]$

$= \frac{1}{2}\left[0 - 0 - 3(2-5) \right] = 4\frac{1}{2}$ متر مربع



حاول أن تحل

٥ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة المثلث المبين بالشكل المقابل.

تعلم

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

Solving a system of linear equations by Cramer's method

١- حل أنظمة المعادلات الخطية في مجهولين

Solving a system of Linear equations in two unknowns

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في مجهولين كالآتي:

$\text{أ س} + \text{ب ص} = \text{م}$

$\text{جـ س} + \text{ء ص} = \text{ن}$

فإن المصفوفة التي عناصرها معاملا المجهولين بعد ترتيب النظام تسمى بمصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$ ويمكنك استخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية، فإذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ ويرمز له بالرمز $\triangle$ (يقرأ دلتا) لايساوى صفرًا، فإن للنظام حلاً وحيدًا، و إذا كانت قيمة المحدد صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل.

ونلاحظ أن معاملى المجهول س تكوِّن العمود الأول للمحدد $\triangle$، ومعاملا المجهول ص تكوِّن العمود الثاني للمحدد $\triangle$.

يسمى $\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ء} \end{vmatrix}$ محدد المجهول س ونرمز له بالرمز $\triangle_{\text{س}}$ (يقرأ دلتا س)، ونحصل عليه من المحدد $\triangle$ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن.

كما يسمى $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{ن} \end{vmatrix}$ محدد المجهول ص ونرمز له بالرمز $\triangle_{\text{ص}}$ (يقرأ دلتا ص)، ونحصل عليه من المحدد $\triangle$ بعد تغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م، ن.

والآن: نفرض أن $\triangle \neq 0$ ، فإن حل النظام هو:

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ء} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix}} = \frac{\text{م ء} - \text{ن ب}}{\text{أ ء} - \text{جـ ب}}$

$\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{ن} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix}} = \frac{\text{أ ن} - \text{جـ م}}{\text{أ ء} - \text{جـ ب}}$

مثال

٧ حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر.

$\text{س} - 3\,\text{ص} = -4 \qquad 2\text{س} + \text{ص} = 2$

الحل

حيث إن: $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times -3) = 1 + 6 = 7 \neq 0$

فيكون

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(-4 \times 1) - (2 \times -3)}{7} = \frac{-4 + 6}{7} = \frac{2}{7}$

$\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(1 \times 2) - (-2 \times -4)}{7} = \frac{2 + 8}{7} = \frac{10}{7}$

مجموعة الحل = $\{(\frac{2}{7}, \frac{10}{7})\}$

تحقق:

- $\frac{2}{7} - 3(\frac{10}{7}) \stackrel{?}{=} -4$
  $\frac{-28}{7} = -4$ (✓)
- $2(\frac{2}{7}) + \frac{10}{7} \stackrel{?}{=} 2$
  $2 = 2$ (✓)

حاول أن تحل

٦ حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر:

$\text{س} + 2\,\text{ص} = 0 \qquad 2\,\text{س} - 3\,\text{ص} = 1$

٢- حل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل

Solving systems of Linear equations in three unknowns

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل كالآتي:

$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{جـ}_1\text{ع} = \text{م} \qquad \text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{جـ}_2\text{ع} = \text{ن} \qquad \text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{جـ}_3\text{ع} = \text{ك}$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة نظام معادلتين خطيتين في مجهولين يكون:

$\triangle = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$ = محدد المعاملات

$\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{ن} & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{ك} & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$ = محدد المجهول س
نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م، ن، ك

$\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{م} & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ن} & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ك} & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$ = محدد المجهول ص
نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م، ن، ك

$\triangle_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{م} \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ن} \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ك} \end{vmatrix}$ = محدد المجهول ع
نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م، ن، ك

التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل صفحة (٢٨)

٦ $\text{س} + 2\text{ص} = 0$ ، $2\text{س} - 3\text{ص} = 1$

$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0$

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

$\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1}{-7} = \frac{-1}{7}$

مجموعة الحل = $\{\frac{2}{7}, \frac{-1}{7}\}$

٢- حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل:

ناقش مع طلابك حل نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل، موضحًا أنه يمكن اتباع نفس الخطوات المتبعة فى حل نظام معادلات خطية فى مجهولين مستعينًا بما ورد فى صفحتى (٢٨)، (٢٩) من كتاب الطالب

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٢٩)

٧ $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

$\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 36$، $\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 12$،

$\triangle_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 24$

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{36}{12} = 3$ ، $\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{12}{12} = 1$،

$\text{ع} = \frac{\triangle_{\text{ع}}}{\triangle} = \frac{24}{12} = 2$

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

١ أ) س = −١، ص = ٢، ع = ٣
فيكون مجموعة الحل = {(−١، ٢، ٣)}

ب) س = ١، ص = ٠، ع = ١
فيكون مجموعة الحل = {(٠، −١، ٠)}

٢ ثمن الكشكول ١٥ جنيهًا، وثمن الكتاب ٢٠ جنيهًا.

التقييم

اطلب إلى طلابك حل كل نظام من المعادلات الآتية:

١ ٣س − ٥ص = −١
س + ٦ص = ٣

٢ ٢س − ص − ع = ٢
٣س + ص − ع = ١
−س + ٢ص + ٦ع = ٣

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين

حل المشكلات

إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ك = $\begin{pmatrix} ١- \\ ٨ \\ ١ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$

استخدم طريقة كرامر لحل نظام المعادلات.

م س = ك

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط صفحة (٧)

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يستخدم الطالب الطريقة المعروضة فى فك المحددات والحصول على نتائج صحيحة.
جيد جدًّا ٨ درجات	يستخدم الطالب بمساعدة طفيفة من المعلم الطريقة المعروضة فى فك المحددات والحصول على نتائج صحيحة .
جيد ٧ درجات	يستخدم الطالب الطريقة المعروضة فى فك المحددات والحصول على نتائج صحيحة بمساعدة كبيرة من المعلم.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب استخدام الطريقة المعروضة فى فك المحددات، ولكنه يحتاج إلى مساعدة كبيرة من المعلم لفهم هذه الطريقة والحصول على نتائج صحيحة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب استخدام الطريقة المعروضة فى فك المحددات، ويحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

والآن إذا فرض أن △ ≠ صفر، فإن: س = $\frac{△_س}{△}$، ص = $\frac{△_ص}{△}$، ع = $\frac{△_ع}{△}$

مثال

٨ حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر.

−س + ٣ص + ع = ٠ ٣س − ٢ص − ع = ١ س + ص + ٢ع = ٠

الحل

△ = $\begin{vmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٣ & ٢- & ١- \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = −١ (−٤ + ١) − ٣ (−٦ − ١) + ١ (−٣ + ٢)
= −٣ − ١٥ − ١ = −١٣

△س = $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢- & ١- \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = −١ (٦ − ١) = −٥

△ص = $\begin{vmatrix} ١- & ٠ & ١ \\ ٣ & ١ & ١- \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ (−١ × ٢ − ١ × ١) = −٣

△ع = $\begin{vmatrix} ١- & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٢- & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ = −١ (−١ × ١ − ١ × ٣) = ٤

∴ س = $\frac{△_س}{△} = \frac{٥-}{١٣-} = \frac{٥}{١٣}$، ص = $\frac{△_ص}{△} = \frac{٣-}{١٣-} = \frac{٣}{١٣}$،

ع = $\frac{△_ع}{△} = \frac{٤}{١٣-}$

مجموعة الحل = {($\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤-}{١٣}$)}

تحقق:

- −($\frac{٥}{١٣}$) + ٣($\frac{٣}{١٣}$) + ($\frac{٤-}{١٣}$) ≟ ٠
  ٠ = ٠ (✓)
- ٣($\frac{٥}{١٣}$) − ٢($\frac{٣}{١٣}$) − ($\frac{٤-}{١٣}$) ≟ ١
  ١ = ١ (✓)
- $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{٣}{١٣}$ + ٢($\frac{٤-}{١٣}$) ≟ ٠
  ٠ = ٠ (✓)

حاول أن تحل

٧ حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر:

س + ص − ع = ٢ س + ٢ص + ع = ٧ ٣س − ص + ع = ١٠

تحقق من فهمك

١ حل كل من أنظمة المعادلات الآتية بطريقة كرامر.

أ ٢س − ٣ص + ٥ع = ٧
٣س + ٤ص + ٢ع = ١١
س − ٢ص + ٧ع = ١٦

ب ٢س + ص − ع = −١
٢س − ص + ٤ع = ١
٥س − ٣ص + ٢ع = ٣

٢ الربط بالمستهلك: اشترى فادى ٣ كشاكيل وكتابين بمبلغ ٨٥ جنيهًا، واشترى كريم كشكولين و ٤ كتب من الأنواع نفسها بمبلغ ١١٠ جنيه . استخدم طريقة كرامر لإيجاد سعر كل من الكشكول والكتاب.

نشاط

٦ لإيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ & ٤ \\ ٦ & ٢٥ & ١١ \\ ٧ & ٥٢ & ٢١ \end{vmatrix}$

لاحظ الطريقة التالية فى الحل

٥ ٧ ٤ ٥ ٧
٦ ٢٥ ١١ ٦ ٢٥
٧ ٥٢ ٢١ ٧ ٥٢

- لاحظ أننا كتبنا الأعمدة الثلاثة للمحدد وكررنا العمودين الأولين.
- ارسم خطوطًا قطرية عبر كل ثلاثة عناصر كالمبين بالأسهم المنقطة فتكون الحدود الناتجة من كل خط هى حدودًا فى المفكوك والأسهم المتجهة إلى أسفل تكون حدودها المناظرة موجبة، بينما تلك المتجهة إلى أعلى تكون سالبة.

المحدد = ٥ × ٢٥ × ٢١ + ٧ × ١١ × ٧ + ٤ × ٦ × ٥٢ − ٤ × ٢٥ × ٧ − ٥ × ١١ × ٥٢ − ٧ × ٦ × ٢١
= ٢٦٢٥ + ٥٣٩ + ١٢٤٨ − ٧٠٠ − ٢٨٦٠ − ٨٨٢
= −٣٠

حاول أن تحل

استخدم الطريقة السابقة فى فك كل محدد مما يلى و إيجاد قيمته:

أ △= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١١ & ٩ & ١٣ \\ ١٥ & ١٧ & ١٩ \end{vmatrix}$ ب △= $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٣٩ & ٩ & ٧٠ \end{vmatrix}$

ج △= $\begin{vmatrix} ١ & ٢- & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ د △= $\begin{vmatrix} ٣ & ٤- & ٣- \\ ٢ & ٧ & ٣١- \\ ٥ & ٩- & ٢ \end{vmatrix}$

تأكد من صحة إجاباتك بإيجاد قيمة كل محدد بالطريقة المعتادة ومقارنة نتائجك .

....

....

....

....

....

١ - ٥

المعكوس الضربى للمصفوفة

Inverse Matrix

خلفية

درس الطالب مفهوم المصفوفة، والعمليات على المصفوفات، وإيجاد محدد مصفوفة مربعة، والآن سوف يتعلم كيفية إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد المعكوس الضربى لمصفوفة من النظم ٢ × ٢.
- يحل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام معكوس المصفوفة.

مفردات أساسية

معكوس ضربى للمصفوفة – مصفوفة الوحدة – معادلة مصفوفية – مصفوفة المتغيرات – مصفوفة الثوابت.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٣٠ إلى صفحة ٣٤.

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٨ إلى صفحة ٩.

إجراءات الدرس

التمهيد

- اطلب إلى طلابك أن يصفوا ما تعلموه عن المعكوس الضربى للأعداد، وأن يعرفوا هذا المعكوس، ثم اطلب إليهم أن يخمنوا ماذا يعنى معكوس المصفوفة.

---

١ - ٥

المعكوس الضربى للمصفوفة

Multiplicative Inverse of a Matrix

سوف تتعلم

- إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة على النظم ٢ × ٢
- حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام معكوس المصفوفة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معكوس ضربى لمصفوفة Multiplicative inverse of a matrix
- مصفوفة الوحدة Identity matrix
- معادلة مصفوفية Matrix equation
- مصفوفة المتغيرات Variable matrix
- مصفوفة الثوابت Constant matrix

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك

١- أوجد كل حاصل ضرب:

أ $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

٢- صف أى أنماط تراها في إجابتك عن البند رقم (١).

٣- أوجد كل حاصل ضرب:

أ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

٤- صف أي انماط تراها في إجابتك عن البند رقم (٣).

٥- تفكير ناقد: كيف تربط إجاباتك عن البندين (١) ، (٣) ؟

تعلم

المعكوس الضربي للمصفوفة ٢ × ٢:

إذا كان لدينا مصفوفتان مربعتان أ، ب وكل منهما على النظم ٢ × ٢ وكان: أ ب = ب أ = I (I مصفوفة الوحدة) فإن المصفوفة ب تسمى معكوسًا ضربيًا للمصفوفة أ وكذلك تسمى المصفوفة أ معكوسًا ضربيًا للمصفوفة ب.

إذا كان للمصفوفة أ معكوسًّا ضربيًّا فإننا نرمز إليها بالرمز $أ^{-1}$ حيث: $أ\,أ^{-1} = أ^{-1}\,أ = I$

بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًّا وسوف يساعدك مايلى فى استنتاج ما إذا كانت المصفوفة على النظم ٢ × ٢ لها معكوسًّا ضربيًّا أم لا ، وكيفية إيجاد هذا المعكوس إن وجد.

تذكر

١- المصفوفة المحايدة في عملية الضرب هي مصفوفة الوحدة I وهى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى ١ وباقي العناصر أصفار.

٢- لأى عددين حقيقيين يكون كل منهما معكوسًا ضربيًّا للاخر (نظيرًا ضربيًا) إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد الضربي (١)

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = $\Delta \neq 0$.

وبفرض أن المصفوفة $أ^{-1}$ هي المعكوس الضربي للمصفوفة أ، وأن محدد أ = $\Delta \neq 0$ فإن:

$$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$$

عمل تعاوني

- اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «عمل تعاونى» مع متابعة إجاباتهم.

إجابات عمل تعاوني

(١) أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(٢) عند الضرب فى المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ نحصل على نفس المصفوفة.

(٣) أ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٤) عند ضرب كل مصفوفتين كان حاصل الضرب هو مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٥) إجابات متعددة

عرض الدرس

تعلم: المعكوس الضربى للمصفوفة

- أكد على أن مصفوفة الوحدة يجب أن تكون مربعة، ثم ساعد الطلاب على فهم معنى معكوس المصفوفة عن طريق إيجاد العلاقة بين الصيغة أ سـ = I والمعادلة فى البند ٤(أ) من «عمل تعاونى»

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

- اكتب هذه المعادلة على السبورة ودون كل معادلة ذات متغير من الصيغة.

أ سـ = I، ميز أيضًا سـ فى الصورة $أ^{-1}$ وضح للطلاب أنه لايمكن تحديد أى المصفوفتين هى معكوس ضربى للأخرى بمجرد النظر.

توسيع

- شجع الطلاب على استكشاف ماذا يحدث عند ضرب مصفوف ٢ × ٢ فى $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

- اسألهم، ماذا يحدث عند ضرب المصفوفة الناتجة بالمصفوفة الأصلية، دعهم ينظروا جيدًا إلى معادلة معكوس المصفوفة، أكد أنه يمكن تبديل الأماكن بين أ، د ولكن لا يمكن تبديل أماكن ب، جـ وذلك على

مثال

(١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{pmatrix}$ أثبت ان للمصفوفة أ معكوس ضربي ثم أوجد هذا المعكوس

الحل

محدد أ = $\begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix}$ = −١ × −٢ − ٨ × ٠ = ٢

∴ Δ ≠ ٠ أي انه للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا.

$أ^{-1} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

تذكر

إذا كان Δ ≠ ٠ فإن للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا يتعين كالآتي:

أ) تبادل بين وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيسى للمصفوفة أ.

ب) نغير كلا من إشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ

جـ) نضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء (أ)، (ب) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$ فنحصل على $أ^{-1}$

حاول أن تحل

(١) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت ان للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًّا ثم أوجده.

(٢) هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٥ & ٥ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ معكوس ضربي؟ فسر إجابتك.

مثال

(٢) أوجد قيم أ التي تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٢ \\ ٨ & أ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًّا.

الحل

المصفوفة ليس لها معكوسًا ضربيًا عندما يكون محدد المصفوفة يساوى صفرًا.

أى عندما $\begin{vmatrix} أ & ٢ \\ ٨ & أ \end{vmatrix}$ = صفر

أى $أ^{٢}$ − ٨ × ٢ = صفر

$أ^{٢}$ − ١٦ = صفر

إذن توجد قيمتان لـ أ هما ٤، −٤ (وهما جذرا المعادلة $أ^{٢}$ − ١٦ = ٠)

تجعلان المصفوفة المعطاة ليس لها معكوس ضربي.

∴ عندما أ ∈ ع − {−٤، ٤} يكون للمصفوفة المعطاة معكوسًا ضربيًا.

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي.

مثال

(٣) إذا كانت سـ = $\begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن $سـ^{-1}$ = سـ

الحل

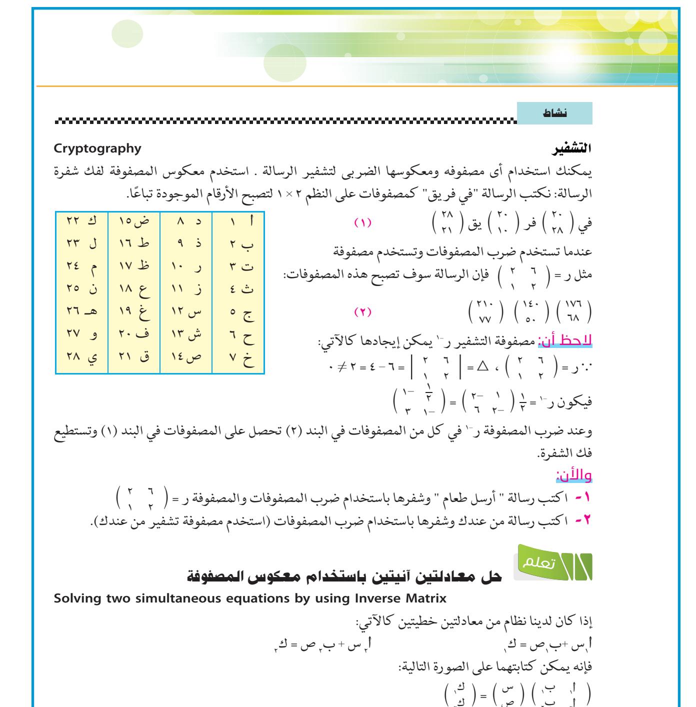
Δ = $\begin{vmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}$ = −١ ≠ ٠

∴ $سـ^{-1} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -١ & -أ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ = سـ

حاول أن تحل

(٤) إذا كان ب = $\begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ فأثبت أن $ب^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$ علمًا بأن س ص ≠ ٠





نشاط

التشفير Cryptography

يمكنك استخدام أى مصفوفه ومعكوسها الضربى لتشفير الرسالة . استخدم معكوس المصفوفة لفك شفرة الرسالة: نكتب الرسالة "في فريق" كمصفوفات على النظم ٢ × ١ لتصبح الأرقام الموجودة تباعًا.

أ ١	د ٨	ض ١٥	ك ٢٢
ب ٢	ذ ٩	ط ١٦	ل ٢٣
ت ٣	ر ١٠	ظ ١٧	م ٢٤
ث ٤	ز ١١	ع ١٨	ن ٢٥
ج ٥	س ١٢	غ ١٩	هـ ٢٦
ح ٦	ش ١٣	ف ٢٠	و ٢٧
خ ٧	ص ١٤	ق ٢١	ي ٢٨

في $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٢٨ \end{pmatrix}$ فر $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ١٠ \end{pmatrix}$ يق $\begin{pmatrix} ٢٨ \\ ٢١ \end{pmatrix}$ (١)

عندما تستخدم ضرب المصفوفات وتستخدم مصفوفة مثل ر = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن الرسالة سوف تصبح هذه المصفوفات:

$\begin{pmatrix} ١٧٦ \\ ٦٨ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٢١٠ \\ ٧٧ \end{pmatrix}$ (٢)

لاحظ أن: مصفوفة التشفير $ر^{-1}$ يمكن إيجادها كالآتي:

∵ ر = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، Δ = $\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٤ = ٢ ≠ ٠

فيكون $ر^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

وعند ضرب المصفوفة $ر^{-1}$ في كل من المصفوفات في البند (٢) تحصل على المصفوفات في البند (١) وتستطيع فك الشفرة.

والأن:

١- اكتب رسالة " أرسل طعام " وشفرها باستخدام ضرب المصفوفات والمصفوفة ر = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

٢- اكتب رسالة من عندك وشفرها باستخدام ضرب المصفوفات (استخدم مصفوفة تشفير من عندك).

تعلم

حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة

Solving two simultaneous equations by using Inverse Matrix

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالآتي:

$أ_{١}$س + $ب_{١}$ص = $ك_{١}$ ، $أ_{٢}$س + $ب_{٢}$ص = $ك_{٢}$

فإنه يمكن كتابتهما على الصورة التالية:

$\begin{pmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك_{١} \\ ك_{٢} \end{pmatrix}$

و إذا فرضنا أن:

أ = $\begin{pmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{pmatrix}$ ، سـ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ك_{١} \\ ك_{٢} \end{pmatrix}$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة معادلة مصفوفية واحدة كالآتي:

أ سـ = ج حيث أ هي مصفوفة المعاملات، سـ هي مصفوفة المجاهيل، ج هي مصفوفة الثوابت.

وإذا كان محدد ا $\neq$ ٠ **أى** $\triangle$ = $ا_١ ب_٢ - ا_٢ ب_١ \neq ٠$

فيكون من الممكن إيجاد حل المعادلة ا سـ = ج كالآتي:

$ا^{-١}$ (ا سـ) = $ا^{-١}$ ج **(بضرب طرفي المعادلة من اليمين في $ا^{-١}$)**

∴ ($ا^{-١}$ ا) سـ = $ا^{-١}$ ج **(خاصية التجميع)**

I سـ = $ا^{-١}$ ج **(المعكوس الضربي للمصفوفة ا)**

∴ **سـ = $ا^{-١}$ ج**

وبهذا يتضح إنه يمكننا إيجاد المجهولين س ، ص بدلالة الثوابت العددية $ا_١$ ، $ب_١$ ، $ا_٢$ ، $ب_٢$ ، $ك_١$ ، $ك_٢$.

مثال

٤ حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات:

٣س + ٢ ص = ٥ ٢ س + ص = ٣

الحل

تكتب المعادلة المصفوفية ا سـ = ج حيث

ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، سـ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

محدد ا = $\triangle$ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ٣ − ٤ = −١ $\neq$ ٠

فيكون للمصفوفة ا معكوسًا ضربيًا ويكون الحل هو ك سـ = $ا^{-١}$ ج وحيث أن:

$ا^{-١}$ = $\frac{١}{\triangle}$ $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{-١}$ $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ سـ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

أى أن س = ١ ، ص = ١

مجموعة الحل {(١، ١)}

التحقق:

٣ (١) + ٢(١) ≟ ٥		
٥	= ٥	(✓)
٢ (١) + ١ ≟ ٣		
٣	= ٣	(✓)

حاول أن تحل

٥ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات.

أ ٣ س + ٧ ص = ٢
٢ س + ٥ص = ١ (تحقق من صحة إجابتك)

ب س + ٣ ص − ٥ = ٠
٢ س = ٨ − ٥ ص (تحقق من صحة إجابتك)

الرغم أن ب، جـ تتبادلان الإشارات السالبة والموجبة

- اطلب إليهم أن يقترحوا طريقة تساعدهم على ذكر هذه الصيغة.

الطريقة البديلة.

- اسأل الطلاب: ما أسرع طريقة لتحديد ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها معكوس أم لا؟
- أوجد ا د − ب جـ، ووضح أنه إذا كانت ا د − ب جـ = ٠ فإن ا د = ب جـ، شجعهم على التجربة عن طريق كتابة مصفوفات تفى بهذا الوصف.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٣١)

١ $\triangle$ = ٥ $\neq$ ٠ ∴ $ا^{-١}$ = $\frac{١}{٥}$ $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \frac{٤}{٥} & ٠ \\ \frac{-٣}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{pmatrix}$

٢ لا؛ $\triangle$ = صفر

٣ المصفوفة ليس لها معكوس ضربيًّا، إذا كان $\triangle$ = صفرًا

∴ $\begin{vmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{vmatrix}$ = صفر ∴ $س^٢$ − ٣٦ = صفرًا

∴ س = ±٦

٤ $\triangle$ = س ص $\neq$ ٠

فيكون $ب^{-١}$ = $\frac{١}{س ص}$ $\begin{pmatrix} ص & س ص \\ ٠ & س \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

نشاط

أكد للطلاب أن ضرب المصفوفة ليس إبداليًّا وعلى الرغم من ذلك فإنه إذا وجد هناك مصفوفتان، كلًّا منها معكوس الأخرى، فإنه ليس من المهم ترتيب المصفوفات أثناء عملية الضرب، وضح أنه إذا كانت المصفوفة ليس لها معكوسًا ضربيًّا فلن يتمكن أحد من فك شفرة الرسالة، حتى إذا أمكن تشفيرها، وقد يواجه الطلاب الذين يستخدمون الضرب التبادلى صعوبة فى فهم هذا؛ لذلك اقترح عليهم أن يحاولوا استخدام مصفوفة ليس لها معكوس، حتى يروا بأنفسهم ما يحدث.

إجابات النشاط

١ أر $\begin{pmatrix}١\\١٠\end{pmatrix}$ سل $\begin{pmatrix}١٢\\٢٣\end{pmatrix}$ طع $\begin{pmatrix}١٦\\١٨\end{pmatrix}$ أم $\begin{pmatrix}١\\٢٤\end{pmatrix}$

باستخدام المصفوفة ر = $\begin{pmatrix}٢&٦\\١&٢\end{pmatrix}$ سوف تصبح الرسالة كالآتي:

$$\begin{pmatrix}٥٤\\٢٦\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١٣٢\\٥٠\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١١٨\\٤٧\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢٦\\١٢\end{pmatrix}$$

٢ إجابات متنوعة.

- انتقل إلى حل معادلتين أنيتين باستخدام معكوس المصفوفة، وناقش خطوات الحل مستعينًا بما ورد صفحتى (٣٢)، (٣٣) من كتاب الطالب، ثم ناقش مع طلابك المثال التطبيقى صفحة (٣٤) من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم إعطاء أمثلة من عندهم لمواقف حياتية تتضمن معادلات خطية فى مجهولين يمكن حلها باستخدام المصفوفات.

مثال



٥ معرض الكتاب: ذهبت هدى ومريم إلى معرض القاهرة الدولى للكتاب، فاشترت هدى من إحدى المكتبات ٥ كتب علمية و٤ كتب تاريخية ودفعت ثمنًا لها مبلغ ١٢٠ جنيهًا، واشترت مريم من نفس المكتبة ٥ كتب علمية، ١٠ كتب تاريخية، ودفعت ثمناً لها مبلغ ١٥٠ جنيهًا، فإذا كانت الكتب العلمية لها نفس الثمن، وكذلك الكتب التاريخية لها نفس الثمن، استخدم المصفوفات في إيجاد سعر كل من الكتاب العلمى والكتاب التاريخى.

الحل

نفرض أن س ثمن الكتاب العلمى، ص ثمن الكتاب التاريخى فيكون:

٥ س + ٤ ص = ١٢٠ ، ٥ س + ١٠ ص = ١٥٠

نكون المعادلة المصفوفية على الصورة : أ س = ج فيكون: $\begin{pmatrix}٤&٥\\١٠&٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}١٢٠\\١٥٠\end{pmatrix}$

نوجد محدد أ = △ حيث △ = $\begin{vmatrix}٤&٥\\١٠&٥\end{vmatrix}$ = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠ ≠ ٠

∴ المصفوفة أ لها معكوس ضربى $أ^{-1}$ حيث $أ^{-1} = \frac{١}{٣٠}\begin{pmatrix}-٤&١٠\\٥&-٥\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-٢}{١٥}&\frac{١}{٣}\\\frac{١}{٦}&\frac{-١}{٦}\end{pmatrix}$

فيكون س = $\begin{pmatrix}\frac{-٢}{١٥}&\frac{١}{٣}\\\frac{١}{٦}&\frac{-١}{٦}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١٢٠\\١٥٠\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢٠\\٥\end{pmatrix}$

أى أن: س = ٢٠ ، ص = ٥

فيكون ثمن الكتاب العلمى ٢٠ جنيهًا

وثمن الكتاب التاريخى ٥ جنيهات.

التحقق: ٥(٢٠) + ٤(٥) ≟ ١٢٠

١٢٠ = ١٢٠ (✓)

٥(٢٠) + ١٠(٥) ≟ ١٥٠

١٥٠ = ١٥٠ (✓)

حاول أن تحل

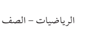
٦ الربط بالمستهلك: اشترت أمل ٨ كجم من الدقيق، ٢ كجم من الزبد، بمبلغ ١٤٠ جنيهًا، واشترت صديقتها ريم ٤ كيلو جرامات من الدقيق، ٣ كيلو جرامات من الزبد، بمبلغ ١٧٠ جنيهًا، استخدم المصفوفات في إيجاد سعر الكيلو جرام الواحد من كلا النوعين.

تحقق من فهمك

١ إذا كان ب = $\begin{pmatrix}٤&٢\\١&٣\end{pmatrix}$، أ ب = I فأوجد المصفوفة أ.

٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix}-٢&٢\\٣&-١\end{pmatrix}$، أ ب = $\begin{pmatrix}-٢&٤\\٧&٠\end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ب

٣ تفكير ناقد: باستخدام المصفوفات ، أوجد عددين مجموعهما ١٠، والفرق بينهما ٤



٣٤ الرياضيات – الصف الثانى الثانوى

٢ أ = $\begin{pmatrix}٢&-٢\\-١&٣\end{pmatrix}$، △ = ٤ ≠ ٠،

$أ^{-1} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix}٢&٣\\٢&١\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{١}{٢}&\frac{٣}{٤}\\\frac{١}{٢}&\frac{١}{٤}\end{pmatrix}$

$أ^{-1}$ أ ب = $أ^{-1}\begin{pmatrix}-٢&٤\\٧&٠\end{pmatrix}$

I ب = $أ^{-1}\begin{pmatrix}-٢&٤\\٧&٠\end{pmatrix}$

ب = $\begin{pmatrix}\frac{١}{٢}&\frac{٣}{٤}\\\frac{١}{٢}&\frac{١}{٤}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-٢&٤\\٧&٠\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢&٣\\٣&١\end{pmatrix}$

٣ العددان هما: ٣، ٧

التقييم

١ حدد ما إذا كانت المصفوفة لها معكوس ضربى أم لا، وإذا كان لها معكوس أوجده:

أ = $\begin{pmatrix}٣&١\\٤&-٢\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٣&١\\٦&٢\end{pmatrix}$

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (٣٣)

٥ أ مجموعة الحل = {(٣، −١)}

ب مجموعة الحل = {(−١، ٢)}

إجابات حاول أن تحل صفحة (٣٤)

٦ ثمن كيلو جرام الزبد ٥٠ جنيهًا، وثمن كيلو جرام الدقيق ٥ جنيهات.

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

١ المصفوفة أ هي $ب^{-1}$ فيكون:

△ = ٢ − ١٢ = −١٠ ≠ ٠

$ت^{-1} = \frac{١}{-١٠}\begin{pmatrix}-٤&١\\٢&-٣\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{٢}{٥}&\frac{-١}{١٠}\\\frac{-١}{٥}&\frac{٣}{١٠}\end{pmatrix}$

٢ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

فأثبت أن $ب^{-١}$ أ ب مصفوفة قطرية

٣ أوجد قيمة س التى تجعل للمصفوفة $\left(س - ١\right) I - أ^{-١}$ معكوس ضربيًا حيث:

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$، $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

نشاط إثرائي للطلاب المتفوقين

- اطلب إلى الطلاب تشفير الاسم الأول لهم باستخدام جدول الحروف الهجائية الموجود على صفحات كتاب الطالب وكتابة مصفوفة الشفرة ر . إذا لم يكن اسم الطالب ممثلًا بعدد زوجى من الحروف، اطلب إليه استخدام الحرف ع كحرف مكمل للاسم.

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

٧ الربط بالهندسة: الخط المستقيم الذى معادلته ص + أ س = حـ يمر بالنقطتين (١، ٥)، (٣، ١)، استخدم المصفوفات لإيجاد قيمة الثابتين أ، حـ .

٨ الربط بالحياة: يشترى سائق دراجة بخارية ٢٤ لترًا من البنزين و ٥ لترات من الزيت بمبلغ ٥٦ جنيهًا لتموين دراجته، بينما يشترى سائق دراجة بخارية أخرى ١٨ لترًا من البنزين، ١٠ لترات من الزيت بمبلغ ٦٧ جنيهًا لتموين دراجته، استخدم المصفوفات فى إيجاد ثمن كل من لتر البنزين ولتر الزيت، إذا علمت أنهما يستخدمان نفس النوعية من البنزين والزيت.

٩ الربط بالهندسة: يمر المنحنى $ص = أس^{٢} + ب س$ بالنقطتين (٢، ٠) ، (٤، ٨)، استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين أ، ب .

١٠ تفكير ناقد: نصف الفرق بين عددين هو ٢ ومجموع العدد الأكبر وضعف العدد الأصغر هو ١٣. باستخدام المصفوفات أوجد العددين.

نشاط

اكتب مسألة من عندك يحتاج حلها إلى تكوين نظام من المعادلات الخطية ، ثم حلها باستخدام المصفوفات.

صفحة (٩)

تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز **١٠ درجات**	يكتب الطالب المسألة بطريقة جيدة، ويحلها حلًّا صحيحًا باستخدام المصفوفات.
جيد جدًا **٨ درجات**	بمساعدة بسيطة من العلم يكتب الطالب المسألة بطريقة جيدة ، ويحلها حلًّا صحيحًا باستخدام المصفوفات.
جيد **٧ درجات**	يكتب الطالب بمساعدة المعلم مسألة، ويحلها باستخدام المصفوفات حلًّا صحيحًا.
مقبول **٥ درجات**	بمساعدة كبيرة من المعلم يحاول الطالب كتابة مسألة وحلها باستخدام المصفوفات.
ضعيف **أقل من ٥ درجات**	لا يستطيع الطالب كتابة المسألة، ويحتاج إلى المساعدة والتوجية.

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية

Linear programing

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب مفهوم المتباينة وحل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى كل من مجموعات الأعداد الطبيعية والصحيحة والحقيقية، وسوف يستكمل الطالب دراسته فى هذه الوحدة للمتباينات الخطية فى مجهولين وكيفية حلها بيانيًّا، ثم يحل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا، ثم يدرس البرمجة الخطية والحل الأمثل من خلال تطبيقات حياتية متنوعة، وذلك من خلال ثلاثة دروس هى كالآتي:

الدرس الأول: المتباينات الخطية.

الدرس الثاني: حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا.

الدرس الثالث: البرمجة الخطية والحل الأمثل.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًّا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًّا.
- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًّا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات، مع تحديد النقاط التى تنتمى إلى مجموعة الحل، وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًّا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًّا.
- يحل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًّا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات، مع تحديد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل، وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.

المصطلحات الأساسية

- متباينة خطية — Linear Inequality
- مستقيم حدى — Boundary line
- مستقيم حدى منقط — Dashed boundary line
- مستقيم حدى متصل — Solid boundary line
- متباينة خطية فى مجهولين — Linear Inequality in two unknowns
- نظام المتباينات الخطية — System of linear inequalities
- منطقة الحل — Feasible region
- رسم بياني — Graph
- برمجة خطية — Linear programing
- القيود — Constrains
- الحل الأمثل — Optimize



دروس الوحدة

الدرس (٢ – ١): المتباينات الخطية.

الدرس (٢ – ٢): حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا.

الدرس (٢ – ٣): البرمجة الخطية والحل الأمثل.

دروس الوحدة

شبكة إحداثيات ١٠ × ١٠

ورق مربعات – أقلام ألوان رصاص –

بعض المواقع الإلكترونية

مثل www.phschool.com

مقدمة الوحدة

عندما يؤدى تحليل مسألة أو مشكلة ما إلى إيجاد قيمة عظمى أو صغرى لتعبير خطى، يجب أن تخضع متغيراته لمجموعة من المتباينات الخطية. فإنه ربما يمكننا الحصول على الحل باستخدام تكنيكات البرمجة الخطية.

وتاريخيًّا، فقد ظهرت مشكلات البرمجة الخطية كنتيجة للحاجة لحل مشكلات تتعلق بمرتبات أفراد القوات المسلحة أثناء الحرب العالمية الثانية، ومن أمثال الذين عملوا فى حل مثل هذه المشكلات چورچ دانتزيج George Dantzig الذى توصل لصيغة عامة لمشكلات البرمجة الخطية مع عرض طريقة لحلها تسمى السمبلكس Simplex method، وللبرمجة الخطية تطبيقاتها فى كل المجالات مثل الصناعة والتجارة وإدارة الوقت، والزراعة، والصحة، وغيرها، فمثلاً يتطلب النجاح فى إدارة الأعمال استخدام البرمجة الخطية، وذلك لتحقيق أقصى ربح ممكن أو تحقيق أقل تكلفة ممكنة وهكذا، وفى هذه الوحدة سوف نتعلم طرق حل مسائل البرمجة الخطية التى تتضمن مجهولين فقط، وتطبيقاتها فى مواقف حياتية مختلفة.

مخطط تنظيمى للوحدة

المتباينات الخطية
حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد
حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين
حل نظام المتباينات الخطية بيانيًا
حل نظام من متباينتين خطيتين بيانيًا
حل نظام من أكثر من متباينتين خطيتين
الربط بالهندسة
الربط بالتربية الرياضية
الربط بالحياة
البرمجة الخطية و الحل الأمثل
الربط بإدارة الأعمال
الربط بالزراعة
الربط بالصناعة
الربط بالمستهلك

زمن تدريس الوحدة

٦ ساعات.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الناقد – التفكير الإبداعى فى الرياضيات – التفكير التحليلى – حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – آلة حاسبة بيانية – جهاز عرض فوق رأسى – شفافيات – أقلام ألوان رصاص – ورق مربعات.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفي أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

٢ - ١

المتباينات الخطية

Linear Inequalities

خلفية

سبق أن درس الطالب علاقات التباين (>، <، ≥، ≤) ومفهوم المتباينة، ودرس أيضًا حل المتباينات الخطية فى مجهول واحد فى ط، صـ، ح ، وفى هذا الدرس سوف يدرس المتباينات الخطية فى مجهول واحد كمراجعة على ما سبق دراسته، ثم المتباينات الخطية فى مجهولين وكيفية تمثيلها بيانيًا.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد، ويمثل الحل بيانيًّا.
- يحل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين مع تحديد منطقة الحل بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية تشمل متباينات خطية فى مجهولين.

مفردات أساسية

متباينة خطية - مستقيم حدى - مستقيم حدى متقطع - مستقيم حدى متصل - متباينة خطية فى مجهول واحد - متباينة خطية فى مجهولين.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسى - شفافيات - آلة حاسبة علمية - أقلام ألوان رصاص.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٣٨ إلى صفحة ٤٢

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ١٦ إلى صفحة ١٧

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

اطلب إلى طلابك عمل عصف ذهنى لمواقف حياتية يمكن التعبير عنها فى صورة متباينات.

ونشير هنا إلى أن العصف الذهني هو أسلوب يهدف إلي إثارة التفكير وقدح الذهن وابتكار الأفكار وتبنيها واقتراح الحلول المتعددة، ونشير هنا إلى قواعد العصف الذهني وهي:

- ينبغي قبول جميع الأفكار مع عدم توجيه أى نقد إزاء أى اقتراح.
- ينبغي تشجيع الطلاب لكى يبنوا على آراء زملاءهم وفي النهاية لا يتم اعتبار استخراج أية فكره تابعة لشخص بعينه.
- استخراج الأفكار والاراء من الطلاب الصامتين ومن ثم إعطاءهم تعزيزًا إيجابيًّا.
- نوعية الأفكار أقل أهمية من كميتها، غير أن ذلك لا يعفي أعضاء المجموعة من محاولة التفكير بإبداعية.

عمل تعاونى

اطلب إلى طلابك تنفيذ العمل التعاونى الموضح صفحة (٣٨) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم ونلاحظ أنه فى السؤال الأول، يمكن إن يستخدم الطالب الذى يقوم بتخمين النقطة السرية فى المستوى الإحداثي لتسجيل كل النقاط التى يتم حذفها فى كل تخمين.

٢ - ١

المتباينات الخطية

Linear Inequalities

سوف تتعلم

- حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وتمثيل الحل بيانيًّا.
- حل متباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين، وتحديد منطقة الحل بيانيًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينة خطية Linear inequality
- مستقيم حدى. Boundary line
- مستقيم حدى متقطع. Dashed boundary line
- مستقيم حدى متصل. Solid boundary line
- متباينة خطية فى مجهول واحد Linear inequality in one unknown
- متباينة خطية فى مجهولين Linear inequality in two unknowns

الأدوات والوسائل

- شبكة إحداثيات ١٠ × ١٠
- ورق مربعات.
- أقلام ألوان رصاص.

عمل تعاونى

الأدوات المستخدمة: شبكة احداثيات ١٠ × ١٠

١- بالاشتراك مع زميل لك العب لعبة "ما النقطة؟"

هدف اللعبة:

تحديد موضع نقطة على المستوى الإحداثى بطرح أقل عدد ممكن من الأسئلة.

كيف تلعب؟

- يختار اللاعب (أ) نقطة على المستوى الإحداثى، ولايعلمها اللاعب الآخر (نقطة سرية)، ويكون كل من إحداثييها عددًا صحيحًا من -٥ إلى ٥
- يسأل اللاعب (ب) أسئلة تشمل الكلمات "أقل من" أو "أكبر من"، ويجيب اللاعب (أ) عن كل سؤال فقط بـ "نعم" أو "لا".

هل س أكبر من أو تساوى صفرًا؟
نعم
هل ص أكبر من أو تساوى صفرًا؟
لا
هل س أقل من ٣؟
نعم
(٢، -٢)
٤ ٢ -٢ -٤

- يسجل اللاعب (أ) عدد الأسئلة المطروحة بينما يُسمى اللاعب (ب) النقطة السرية.
- يتبادل اللاعبان أدوارهما لتكملة جولة واحدة من اللعبة.

كيف تفوز؟

اللاعب الذى يحدد النقطة بطرحه عددًا أقل من الأسئلة هو الذى يفوز بالجولة، واللاعب الذى يفوز بأول ثلاث جولات، هو اللاعب الفائر.

٢- كم سؤالا تحتاج لطرحه لتحديد موضع النقطة السرية؟

٣- إذا كنت محظوظًا بدرجة كبيرة، فما عدد الأسئلة التى تحتاج لطرحها، لتحديد موضع النقطة السرية؟ فسر إجابتك موضحًا بالأمثلة.

٤- كيف تساعدك المتباينات فى تحديد موضع النقطة السرية؟

٥- اقترح إستراتيجية لتفوز فى هذه اللعبة.

٣٨ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

تعلم

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد

Solving linear inequalitues in one unknown

سبق أن درست حل المتباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد، ونذكرك بأن حل المتباينات يتوقف على مجموعة التعويض، كما يتوقف على خواص علاقة التباين التالية:

خواص علاقة التباين فى ح

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح فإن:

- إذا كان أ ≥ ب فإن أ + جـ ≥ ب + جـ لكل جـ ∈ ح
  - أ جـ ≥ ب جـ لكل جـ > ٠
  - أ جـ ≤ ب جـ لكل جـ < ٠
- إذا كان أ ≤ ب فإن أ + جـ ≤ ب + جـ لكل جـ ∈ ح
  - أ جـ ≤ ب جـ لكل جـ > ٠
  - أ جـ ≥ ب جـ لكل جـ < ٠

لاحظ: إذا كانت المتباينة فى متغير واحد فإنه يمكن تمثيل مجموعة حلها على خط الأعداد وذلك كما درست مسبقًا.

مثال

① أوجد مجموعة حل كل من المتباينتين التاليتين حيث س ∈ ح ثم مثل الحل على خط الأعداد:

أ ٣س − ٩ < ٦ س   ب ٦ + س < ٣ س + ٢ ≤ ١٤ + س

الحل

أ ٣س − ٩ < ٦ س   بإضافة (٩ − ٦س) لكل من الطرفين.

∴ ٣ س − ٩ + ٩ − ٦س < ٦ س + ٩ − ٦س

∴ −٣ س < ٩   (بضرب الطرفين فى $-\frac{1}{3}$)

س > −٣

مجموعة الحل =]−٣ ، ∞[

ب نقسم المتباينة إلى متباينتين كالآتي:

المتباينة الأولى: ٦ + س < ٣ س + ٢   المتباينة الثانية: ٣س + ٢ ≤ ١٤ + س

∴ ٦ − ٢ < ٣ س − س   ∴ ٣س − س ≤ ١٤ − ٢

∴ س > ٢   ∴ س ≤ ٦

مجموعة الحل =]٢، ∞[مجموعة الحل =]−∞، ٦]

مجموعة الحل =]٢، ∞[∩]−∞، ٦] =]٢، ٦]

حاول أن تحل

① حل المتباينات الآتية فى ح ومثل مجموعة الحل بيانيًا على خط الأعداد:

أ ٣س + ٥ ≥ ٢   ب ٢ < س − ١ < ٥   جـ ٣ + ٢س < ٣س + ٢ ≤ س + ٧

إجابات عمل تعاونى

٢- اختبر عمل الطلاب.

٣- سؤالين؛ هل س أكبر من ٩؟ نعم، هل ص أكبر من ٩؟ نعم، النقطة هى (١٠، ١٠)

٥- باستخدام المتباينة نستبعد تخمينات كثيرة لسؤال واحد.

٦- إجابات متنوعة؛ اختبر إجابات طلابك.

عرض الدرس

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد

- ذكر طلابك بخواص حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد عارضًا لهذه الخواص على شفافية، مستعينًا بالجدول الوارد صفحة (٣٩) من كتاب الطالب موضحًا ذلك بالأمثلة؛ ووضح أن المتباينة فى متغير واحد يمكن تمثيلها على خط الأعداد كما درس مسبقًا، وأيضًا يمكن تمثيلها على المستوى الإحداثى إذا كانت مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية ح، وذلك كما ورد فى بند «فكر وناقش».
- اطلب إلى طلابك إعطاء مثال يوضح ذلك.
- ناقش الأمثلة المتضمنة فى صفحة (٣٩) من كتاب الطالب والتى تهدف إلى مراجعة حل المتباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (٣٩) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل صفحة (٣٩)

① أ ٣س + ٥ ≥ ٢

٣س + ٥ − ٥ ≥ ٢ − ٥   (بطرح ٥ من الطرفين)

٣س ≥ −٣   (بضرب الطرفين فى $\frac{1}{3}$)

س ≥ −١   مجموعة الحل = [−١، ∞[

ب ٢ < س − ١ < ٥   (بأضافة ١)

٢ + ١ < س − ١ + ١ < ٥ + ١

٣ < س < ٦   مجموعة الحل =]٣، ٦[

جـ ٢س + ٣ < ٣س + ٢ ≤ س + ٧

نقسم المتباينة إلى متباينتين كالآتى:

المتباينة الأولى:

٢س + ٣ < ٣س + ٢   (بطرح ٢س من الطرفين)

٢س + ٣ − ٢س < ٣س − ٢س + ٢

٣ < س + ٢   (بطرح ٢ من الطرفين)

٣ − ٢ < س + ٢ − ٢

١ < س   مجموعة الحل =]١، ∞[

المتباينة الثانية

٣س + ٢ ≤ س + ٧   (بطرح س من الطرفين)

٣س − س + ٢ ≤ س − س + ٧

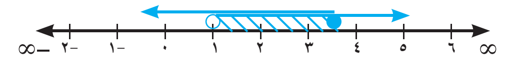
٢س + ٢ ≤ ٧   (بطرح ٢ من الطرفين)

٢س ≤ ٥   (بالضرب فى $\frac{1}{2}$)

س ≤ $\frac{5}{2}$ مجموعة الحل =]−∞، $\frac{5}{2}$]

مجموعة حل المتباينة الأصلية

=]١، ∞[∩]−∞، $\frac{5}{2}$] =]١، $\frac{5}{2}$]



تعلم: حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهولين

ناقش مع طلابك كيفية حل متباينة الدرجة الأولى فى مجهولين مستعينًا بالأمثلة الواردة صفحى (٤٠)، (٤١) من كتاب الطالب.

تجنب الخطأ:

أخطاء واردة: ربما لا يستطيع بعض الطلاب تذكر متى يستخدم الخط الحدى المتقطع، والخط الحدى المتصل.

مقترحات للعلاج: اربط الخط الحدى المتقطع بالدائرة المفتوحة عند تمثيل متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد على خط الأعداد، واربط الخط الحدى المتصل بالدائرة المغلقة عند تمثيل متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد على خط الأعداد.

ملاحظات على الأمثلة: فى المثال (٣) اسأل الطلاب، لماذا تم وضع المستقيم الحدى على صورة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات؟

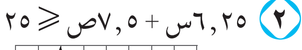
بالمناقشة يتوصل الطلاب أن وضع المستقيم الحدى على هذه الصورة يجعل من السهل تمثيل المستقيم الحدى بيانيًّا.

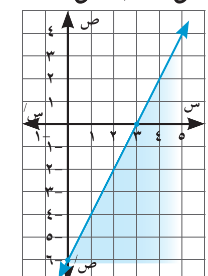
للطلاب ذوى التعلم الحركى: نظف مكان واسع من حجره الدراسة ثم اصنع مستوى إحداثيًّا كبيرًا على الأرض باستخدام الخيط أو الشرائط الملونة؛ وجه الطلاب للتحرك نحو المناطق الصحيحة على الشبكة عند ذكر متباينات بسيطة مثل ص ≤ ٣، س > ١، ص ≤ س

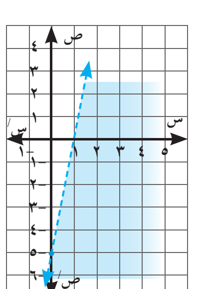
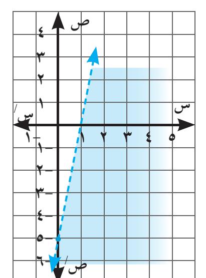
التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (٤١)، مع متابعة إجاباتهم.

إجابات «حاول ان تحل» صفحة (٤١)


٢ ٦,٢٥س + ٥,٧ص ≤ ٢٥



ناقش مع طلابك المثال رقم (٤) صفحة (٤٢) من كتاب الطالب، وهو مثال يشمل تطبيق حياتي، ناقش طلابك لماذا تظهر منطقة الحل فى الربع الأول من المستوى الإحداثى فقط، وبالمناقشة يتوصل الطلاب إلى أنه عدد

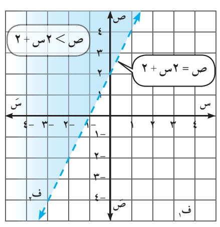
تعلم

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهولين

Solving linear inequalities in two unknowns

المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين تشبه المعادلة الخطية من الدرجة الأولى فى مجهولين، والفرق بينهما هو وضع رمز المتباينة بدلاً من وضع رمز التساوى فمثلا: ص > ٢ س + ٢ هى متباينة خطية، ص = ٢ س + ٢ هى معادلة خطية مرتبطة بها.

التمثيل البيانى للمتباينة ص > ٢ س + ٢ موضح بالمنطقة المظللة فى الشكل المقابل.



ونلاحظ أن كل نقطة فى المنطقة الملونة تحقق المتباينة، والتمثيل البيانى للمستقيم ص = ٢ س + ٢ هو حد المنطقة الممثلة للحل، وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز ≥ أو ≤ فإن النقاط الواقعة على المستقيم الحدى ستحقق المتباينة وعندئذ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال

٢ مثل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة: ص > ٢ س + ٣

الحل

الخطوة (١): ارسم المستقيم الحدى ص = ٢ س + ٣

ولاحظ أن نقط المستقيم الحدى ليست حلًّا للمتباينة لذا يرسم المستقيم الحدى متقطعًا.

س	٠	١-	٢-
ص	٣	١	١-

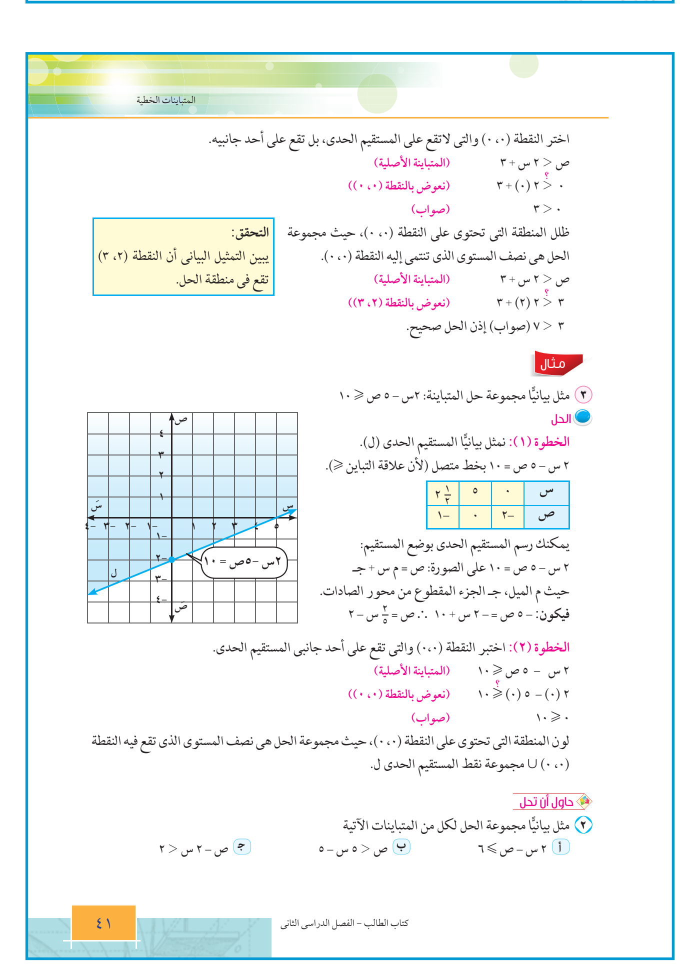
ص = ٢س + ٣

لاحظ

المستقيم الحدى يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط.
١- مجموعة نقط المستقيم الحدى.
٢- مجموعة نقط المستوى التى تقع على أحد جانبى المستقيم الحدى وتسمى نصف مستوى ويرمز لها بالرمز (ف١).
٣- مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم الحدى وتسمى نصف مستوى ويرمز لها بالرمز (ف٢).

الخطوة (٢): نختار إحدى النقط فى أحد جانبى الخط المرسوم ونعوض بها فى الطرف الأيمن، فإذا حققت هذه النقطة المتباينة نلون هذا الجانب (مجموعة الحل)، وإذا لم تحقق المتباينة نلون الجانب الآخر ويكون هو مجموعة الحل.

٤٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى



المتباينات الخطية

اختر النقطة (٠، ٠) والتى لاتقع على المستقيم الحدى، بل تقع على أحد جانبيه.

ص > ٢ س + ٣ (المتباينة الأصلية)

٠ >؟ ٢ (٠) + ٣ (نعوض بالنقطة (٠، ٠))

٠ > ٣ (صواب)

ظلل المنطقة التى تحتوى على النقطة (٠، ٠)، حيث مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠، ٠).

ص > ٢ س + ٣ (المتباينة الأصلية)

٣ >؟ ٢ (٢) + ٣ (نعوض بالنقطة (٢، ٣))

٣ > ٧ (صواب) إذن الحل صحيح.

التحقق: يبين التمثيل البيانى أن النقطة (٢، ٣) تقع فى منطقة الحل.

مثال

٣ مثل بيانيًّا مجموعة حل المتباينة: ٢س - ٥ ص ≤ ١٠

الحل

الخطوة (١): نمثل بيانيًّا المستقيم الحدى (ل).

٢ س - ٥ ص = ١٠ بخط متصل (لأن علاقة التباين ≤).

س	٠	٥	$2\frac{1}{2}$
ص	٢-	٠	١-

يمكنك رسم المستقيم الحدى بوضع المستقيم:

٢ س - ٥ ص = ١٠ على الصورة: ص = م س + جـ

حيث م الميل، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات.

فيكون: - ٥ ص = - ٢ س + ١٠ ∴ ص = $\frac{2}{5}$ س - ٢

٢س - ٥ص = ١٠

الخطوة (٢): اختبر النقطة (٠،٠) والتى تقع على أحد جانبى المستقيم الحدى.

٢ س - ٥ ص ≤ ١٠ (المتباينة الأصلية)

٢ (٠) - ٥ (٠) ≤؟ ١٠ (نعوض بالنقطة (٠، ٠))

٠ ≤ ١٠ (صواب)

لون المنطقة التى تحتوى على النقطة (٠، ٠)، حيث مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (٠، ٠) ∪ مجموعة نقط المستقيم الحدى ل.

حاول أن تحل

٢ مثل بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية

أ ٢ س - ص ≥ ٦ ب ص > ٥ س - ٥ ج ص - ٢ س > ٢

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ٤١

مثال

٤ تطبيقات حياتية: **تسوق الطعام**: افترض أنك قررت عدم صرف أكثر من ٤٨ جنيهًا لشراء الحمص والفول السودانى اللازم لرحلتك أنت وعائلتك إلى حديقة الحيوان بالجيزة، كم كيلو جرامًا يمكنك شراؤه من كل نوع؟

حمص
الكيلو ٨ جنيهات

فول سودانى
الكيلو ١٦ جنيهًا

الحل

عرف: نفرض أن س = عدد الكيلو جرامات التى يمكنك شراؤها من الحمص.
ص = عدد الكيلو جرامات التى يمكنك شراؤها من الفول السودانى.

اربط: ثمن شراء الحمص + ثمن شراء الفول السودانى ⩽ الحد الأقصى للشراء (انظر إلى الرسم).

اكتب: ٨ س + ١٦ ص ⩽ ٤٨

ارسم المستقيم الحدى ٨ س + ١٦ ص = ٤٨، ويمثل بخط مستقيم متصل (لأن علاقة التباين ⩽).
استخدم الربع الأول فقط من المستوى الإحداثى، حيث إنه لايمكنك شراء كمية سالبة من المحمصات.

س	٠	٦	٢
ص	٣	٠	٢

اختبر النقطة (٠، ٠)

٨ (٠) + ١٦ (٠) ⩽ ٤٨ ؟

٠ ⩽ ٤٨ (صواب)

لون المنطقة التى تحتوى النقطة (٠، ٠).

محمصات الرحلة

الفول السودانى (بالكجم)

الحمص بالكجم

يوضح التمثيل البيانى كل الحلول الممكنة، على سبيل المثال إذا قمت بشراء ٢ كجم من الحمص، فإنه لايمكنك شراء أكثر من ٢ كجم من الفول السودانى. والآن هل ٢ كجم حمص، ١ كجم من الفول السودانى حل لهذا المثال؟

تحقق من فهمك

١ تفكير ناقد: عندما نمثل المتباينة ص ⩽ $\frac{٢}{٥}$ س − ٢ بيانيًّا، هل ستظلل المنطقة فوق أم تحت الخط المستقيم ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٢؟ كيف علمت ذلك؟

٢ الربط بالمستهلك: تبيع مكتبة نوعين من الكشاكيل، النوع الأول سعره ٦,٢٥ جنيه، والنوع الآخر سعره ٧,٥ جنيه، فإذا أراد أحمد شراء بعض من هذه الكشاكيل، بحيث لا يدفع أكثر من ٢٥ جنيهًا، فكم عدد الكشاكيل التى يمكنه شراؤها من كل نوع؟



الرياضيات – الصف الأول الثانوى

الكيلوجرامات من كل من الحمص والفول السودانى يجب أن تكون موجبة.

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

١ فوق الخط المستقيم، إجابات متنوعة.

٢ ٦,٢٥ س + ٧,٥ ص ⩽ ٢٥

التقييم

اطلب إلى طلابك حل المسألة التالية:

مثل بيانيًّا كل من المتباينات التالية:

أ ص < −٢س + ١ ب $\frac{١}{٢}$ س − ص ⩾ ١

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين

قرر الأستاذ محب معلم الرياضيات عمل دورة مكثفة فى الرياضيات للطلاب الذين يقل مجموع درجاتهم فى كل من أعمال السنة واختبار الشهر عن ٣٠ درجة.

- اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.
- هل الطلاب الذين حصلوا على ١٠ درجات فى أعمال السنة، ١٨ درجة فى اختبار الشهر يخضعون لشروط حضور هذه الدورة؟ فسر إجابتك.

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط (١) صفحة (٢)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة بصورة صحيحة ويوضح كيفية التحقق من صحة الإجابة
جيد جدًّا ٨ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة بصورة صحيحة، ولكن قد يصعب عليه توضيح كيفية التحقق من صحة الإجابة.
جيد ٧ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة بصورة صحيحة، ولكنه يحتاج لبعض المساعدة ليتحقق من صحة الإجابة.
مقبول ٥ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة، ولكنه يحتاج لمساعدة كبيرة ليتحقق من صحة الإجابة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب عرض خطوات تمثيل المتباينة، ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

نشاط (٢) صفحة (٣٢)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يستطيع الطالب استخدام الآلة الحاسبة البيانية بكفاءة لرسم المتباينات، كما أن حله لجميع المسائل صحيحًا.
جيد جدًّا ٨ درجات	يستطيع الطالب بمساعدة طفيفة استخدام الآلة الحاسبة البيانية لرسم المتباينات والحصول على الحلول الصحيحة للمسائل المعطاة.
جيد ٧ درجات	يستطيع الطالب استخدام الآلة الحاسبة البيانية بصورة مقبولة لرسم المتباينات، إلا أنه لديه أخطاء فى حل بعض المسائل.
مقبول ٥ درجات	يستطيع الطالب بمساعدة كبيرة من المعلم استخدام الآلة الحاسبة البيانية لرسم المتباينات، وحل المسائل المعطاة بصورة صحيحة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب استخدام الآلة الحاسبة البيانية ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

٢ - ٢

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

Solving Systems Of Linear Inequalities By Graphing

خلفية

سبق أن درس الطالب المتباينات الخطية وحل متباينات من الدرجة الأولى في مجهول واحد وفي مجهولين، وفي هذا الدرس سوف يتعلم الطالب حل أنظمة من المتباينات الخطية تشمل متباينتين أو أكثر بيانيًا.

أهداف الدرس

في نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.

مفردات أساسية

نظام متباينات خطية - منطقة الحل - رسم بياني - خط حدى منفصل - خط حدى متصل.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - طباشير ملون - جهاز عرض فوق رأسي - شفافيات - آلة حاسبة علمية - حاسبة بيانية - ألوان رصاص.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المسكلات - التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٤٣ إلى صفحة ٤٧
كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ١٨
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

ادع الطلاب لاقتراح أقل طول وأقل عرض لظرف خطاب يعتقدون أن هيئة البريد سوف تسمح باستخدامه في إرسال الخطابات اكتب اقتراحات طلابك على السبورة، ثم لخص مقترحاتهم بكتابة متباينتين خطيتين مثل ل ⩾ ١٥سم، ع ⩾ ١٢سم ، دع طلابك يفهموا أن المسائل الحياتية التي لها حلول متعددة يمكن نمذجتها بنظام من المتباينات الخطية.

٢ - ٢

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

Solving Systems of Linear Inequalities Graphically

سوف تتعلم

- حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا.
- حل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك.

١- مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة س ⩽ ٢ فى مستوى إحداثى متعامد، ولون منطقة الحل باللون الأصفر.

٢- مثِّل بيانيًا مجموعة حل المتباينة ص > -١ فى نفس المستوى الإحداثى المتعامد، ثم لون منطقة الحل باللون الأخضر.

٣- حدد المنطقة التى تداخل فيها اللونين الأصفر والأخضر معًا.

٤- ماذا تمثل المنطقة التى حددتها فى بند (٣)؟

٥- اختر ثلاث نقط مختلفة يمثل كل منها حلًّا للمتباينتين معًا. فسر إجابتك.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- نظام متباينات خطية System of linear inequalities
- منطقة الحل Feasible region
- رسم بياني. Graph

تعلم

نظام المتباينات الخطية

تُكون متباينتان خطيتان أو أكثر معًا نظامًا من المتباينات الخطية، ويكون الزوج المرتب ($س_١$، $ص_١$) حلًّا لهذا النظام إذا حقق جميع متبايناته.

حاول أن تحل

١ يمكنك وصف كل ربع من أرباع مستوى إحداثى متعامد باستخدام نظامٍ من المتباينات الخطية.

من الشكل المقابل، حدد رقم الربع الذى يمثل مجموعة حل كل نظام مما يأتى

أ س > ٠ ، ص > ٠
ب س < ٠، ص > ٠
ج س < ٠، ص < ٠
د س > ٠، ص < ٠

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بياني.
- ألوان رصاص.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ٤٣

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استكشف ماذا يحدث إذا كانت التمثيلات البيانية للخطوط أو للمتباينات الخطية على نفس المستوى الإحداثي.

١- هل يمكنك رسم مستقيمين بالتقاطع المعطى؟ دعم كل إجابة برسم أو بتوضيح.
أ نقطة. ب خط. ج منطقة. د لايوجد تقاطع.

٢- هل يمكنك رسم متباينتين خطيتين بالتقاطع المعطى؟ دعم كل إجابة برسم أو توضيح.
أ نقطة. ب خط. ج منطقة. د لايوجد تقاطع.

٣- لخص استنتاجاتك لما سبق. قارن التقاطعات الممكنة لخطين مستقيمين بالتقاطعات الممكنة للتمثيل البياني لمتباينتين خطيتين. ماذا تلاحظ؟

٤- أوجد التقاطعات الممكنة لأكثر من خطين مستقيمين.

تعلم

حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا

Solving a system of liner inequalitues graphically

حل نظام المتباينات الخطية يعنى إيجاد جميع الأزواج المرتبة التى تحقق متباينات هذا النظام.
لتحديد جميع النقاط (الأزواج المرتبة) التى تشكل حلاً للنظام يتم تلوين (تظليل) منطقة حل كل واحدة من المتباينات فى مستوى إحداثى واحد، فتكون المنطقة المشتركة بين مناطق حل جميع المتباينات هى منطقة حل هذا النظام

مثال

① حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيًّا: ص ⩾ ٢ س + ٦ ، ص + ٣س < -١

الحل

الخطوة (١): مثِّل مجموعة حل كل متباينة فى النظام بيانيًّا، ولون منطقة الحل.

للمتباينة الأولى: ص ⩾ ٢ س + ٦

نرسم المستقيم الحدى ص = ٢ س + ٦ (خط متصل)

س	٠	-٣	-٢
ص	٦	٠	٢

النقطة (٠، ٠) لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل $س_١$ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه نقطة الأصل ∪ $ل_١$

للمتباينة الثانية: ص + ٣ س < -١

نرسم المستقيم الحدى ص + ٣ س = -١ (خط متقطع)

س	٠	-١	-٢
ص	-١	٢	٥

النقطة (٠، ٠)لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل $س_٢$ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه نقطة الأصل.

الخطوة (٢): حدد المنطقة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام، وهى المنطقة التى تتداخل فيها الألوان، والتى تمثل منطقة حل النظام، فيكون مجموعة الحل للمتباينتين معًا هى $س_١$ ∩ $س_٢$

تحقق: لاحظ أن النقطة (-٤، ٢) تنتمى إلى منطقة حل النظام؛ لذا يمكن استخدامها نقطة اختبار، والتحقق من صحة الحل بالتعويض عن (س، ص) بالنقطة (-٤، ٢) فى كلتا المتباينتين:

ص ⩾ ٢ س + ٦ ، ص + ٣ س < -١

٢ ⩾ ٢(-٤) + ٦ ، ٢ + ٣ (-٤) < -١

٢ ⩾ -٢ (صواب) ، -١٠ < -١ (صواب)

الرياضيات – الصف الأول الثانوى ٤٤

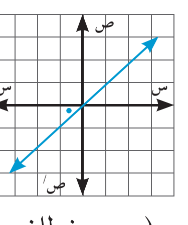
٥- أوجد التقاطعات الممكنة للتمثيلات البيانية لأكثر من متباينتين خطيتين.

دع طلابك يعملوا فى أزواج أو فى مجموعات صغيرة تعاونيًّا، بحيث يكون أحدهم هو المسجل، ربما يرسم الطلاب الأشكال بصورة فردية، ولكن دع الطلاب يتناقشوا قبل إجاباتهم عن السؤال والاتفاق على إجابة واحدة.

إجابات عمل تعاونى:

① أ نعم ب نعم

التوضيح:



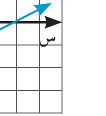
ج لا د نعم (يرسم خطان متوازيان فى المستوى الإحداثى)

② أ لا ب نعم

ج نعم د نعم

③ إجابات متنوعة؛كمثال: إذا تقاطعت الخطوط الحدية فى نقطة فإن التمثيلات البيانية للمتباينات تتقاطع فى منطقة، إما إذا لم تتقاطع الخطوط الحدية فإن التمثيلات البيانية للمتباينات يمكن أن تتقاطع فى منطقة أولًا، أما إذا كانت الخطوط الجدية هى نفسها؛ فإن التمثيلات البيانية للمتباينات تتقاطع فى خط مستقيم أو منطقة أو لا تتقاطع فى أيهما.

④ التقاطعات الممكنة هى: نقطة، خط مستقيم، لايوجد تقاطع، وفيما يلى أمثلة للتمثيلات البيانية.



⑤ التقاطعات الممكنة هي: خط مستقيم، شعاع، منطقة، التقاطع فى نقطة غير ممكن، كما أنه من الممكن إلا تكون هناك تقاطعات.

- اطلب إلى الطلاب القيام بالعمل التعاونى فى بداية صفحة (٤٣) من كتاب الطالب مع متابعة عملهم.
- تعلم الطلاب طرقًا متعددة لحل نظام من المعادلات الخطية (مثل الحذف والتعويض والحل بيانيًّا) وفى هذا الدرس سوف يتعلم الطالب كيفية حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا.

قبل أن تطرح على طلابك السؤال رقم (١) فى بند حاول أن تحل اطلب إليهم وصف ما يلى:

- التمثيل البيانى لـ س = ٠ (محور الصادات)
- التمثيل البيانى لـ ص = ٠ (محور السينات)

اسأل تلاميذك: هل النقط الواقعة على محورى الاحداثيات جزء من أى ربع؟ **لا**.

تأكد من فهم طلابك أن حل نظام من المتباينات الخطية يعنى إيجاد النقط التى تمثل حلًّا لهذه المتباينات معًا.

عرض الدرس

تعلم: حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا:

- ذكر طلابك بخطوات تمثيل المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين بيانيًّا موضحًا بمثال.
- ناقش مع طلابك المثال الموضح صفحة (٤٤) من كتاب الطالب موضحًا كيفية تحديد منطقة الحل، وكيفية اختيار نقطة للتحقق من صحة الحل.

فى مثال (٢)

اسأل طلابك: كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الخطوط متوازية بدون تمثيلها بيانيًّا؟

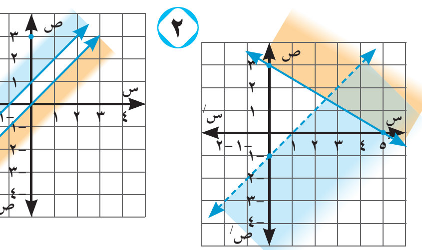
بالمناقشة يتوصل الطلاب إلى أنه يمكن كتابة معادلات الخطوط المستقيمة على صورة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات فنجد أن جميع المستقيمات لها نفس الميل، ولكن هناك إجزاء مختلفة مقطوعة من محور الصادات.

وضح كيف ان هذا النظام من المتباينات الخطية ليس له حل، حيث لاتوجد منطقة مشتركة بين منطقتى حل كل متباينة فى النظام.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (٤٥) مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل صفحة (٤٥):



انتقل إلى مثال (٣) وهو مثال تطبيقى وفيما يلى طريقة بديلة للحل:

وضح حل هذا النظام من المتباينات الخطية باستخدام جهاز العرض فوق رأسى، ارسم على شفافية، شبكة الإحداثيات باللون الأسود، وحل المتباينة ص ≤ ٨٠ باللون الاحمر، على شفافية أخرى، ارسم شبكة الإحداثيات باللون الأسود، وحل المتباينة ٢س + ٢ص ≥ ٣١٠ باللون الأزرق، اعرض كل شفافية بصورة منفصلة، ثم اعرضهما متداخلين، المساحة التى تداخل فيها اللونين الأحمر والأزرق تمثل منطقة الحل.

حاول أن تحل

٢) حل النظام الآتى بيانيًّا: ٣ س + ٥ص ≤ ١٥ ، ص > س −١

مثال

٢) حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيًّا: ٤ ص ≤ ٦س
−٣ س + ٢ص ≥ −٦

الحل

الخطوة (١): مثِّل مجموعة حل كل متباينة فى النظام بيانيًّا، ولون منطقة الحل.

للمتباينة الأولى: ٤ ص ≤ ٦ س

نرسم المستقيم الحدى ٤ ص = ٦س (خط متصل)

س	٠	٢	−٢
ص	٠	٣	−٣

النقطة (٠، ٠) تقع على المستقيم الحدى؛ لذا يختبر باستخدام نقطة أخرى على إحدى جانبى المستقيم الحدى ولتكن (−٣، ٢)

فيكون: ٤ (٢) ≤ ٦ (−٣)

أي ٨ ≤ −١٢ (صواب)

فيكون مجموعة الحل $س_1$، و هى نصف المستوى الذى يقع فيه النقطة (−٣، ٢) ∪ $ل_1$

للمتباينة الثانية: −٣ س + ٢ ص ≥ −٦

نرسم المستقيم الحدى −٣س −٢ص = −٦ (خط متصل)

س	٠	٢	−٢
ص	−٣	٠	٦

النقطة (٠، ٠) لاتحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل $س_2$، و هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه النقطة (٠، ٠) ∪ $ل_2$

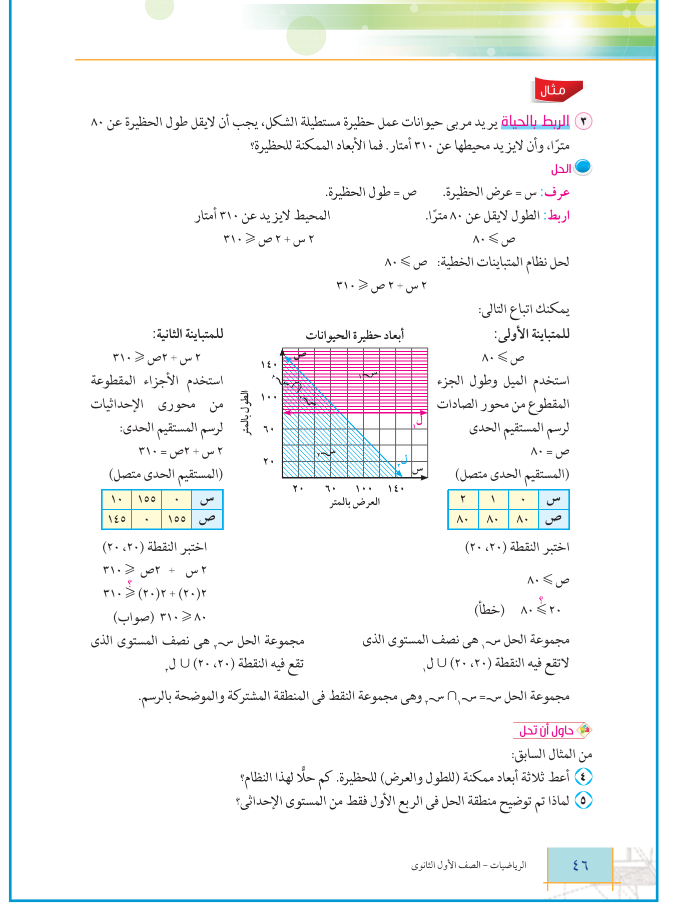
الخطوة (٢): نحدد المنطقة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام، والتى تمثل منطقة حل النظام.

ونلاحظ أن المستقمين $ل_1$، $ل_2$ متوازيان، ولاتوجد منطقة مشتركة بين المنطقتين الملونتين كما فى الشكل.

∴ مجموعة حل المتباينتين معًا = ϕ

حاول أن تحل

٣) أوجد حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيًّا: ص ≥ س
ص ≤ س + ١



مثال

٣) الربط بالحياة يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل، يجب أن لايقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا، وأن لايزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار. فما الأبعاد الممكنة للحظيرة؟

الحل

عرف: س = عرض الحظيرة. ص = طول الحظيرة.

اربط: الطول لايقل عن ٨٠ مترًا. المحيط لايزيد عن ٣١٠ أمتار

ص ≤ ٨٠ ٢ س + ٢ ص ≥ ٣١٠

لحل نظام المتباينات الخطية: ص ≤ ٨٠
٢ س + ٢ ص ≥ ٣١٠

يمكنك اتباع التالى:

للمتباينة الأولى:

ص ≤ ٨٠

استخدم الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لرسم المستقيم الحدى

ص = ٨٠

(المستقيم الحدى متصل)

س	٠	١	٢
ص	٨٠	٨٠	٨٠

اختبر النقطة (٢٠، ٢٠)

ص ≤ ٨٠

٢٠ ≤ ٨٠ (خطأ)

مجموعة الحل $س_1$ هى نصف المستوى الذى لاتقع فيه النقطة (٢٠، ٢٠) ∪ $ل_1$

للمتباينة الثانية:

٢ س + ٢ص ≥ ٣١٠

استخدم الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات لرسم المستقيم الحدى:

٢ س + ٢ص = ٣١٠

(المستقيم الحدى متصل)

س	٠	١٥٥	١٠
ص	١٥٥	٠	١٤٥

اختبر النقطة (٢٠، ٢٠)

٢ س + ٢ص ≥ ٣١٠

٢(٢٠) + ٢(٢٠) ≥ ٣١٠

٨٠ ≥ ٣١٠ (صواب)

مجموعة الحل $س_2$ هى نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (٢٠، ٢٠) ∪ $ل_2$

مجموعة الحل س = $س_1$ ∩ $س_2$ وهى مجموعة النقط فى المنطقة المشتركة والموضحة بالرسم.

حاول أن تحل

من المثال السابق:

٤) أعط ثلاثة أبعاد ممكنة (للطول والعرض) للحظيرة. كم حلًّا لهذا النظام؟

٥) لماذا تم توضيح منطقة الحل فى الربع الأول فقط من المستوى الإحداثى؟

مثال

٤ الربط بالحياة قام إسلام وفادى برحلة لزيارة الآثار الفرعونية بمحافظات الوجه القبلى، فتناوبا قيادة السيارة، فإذا كانت فترات قيادة إسلام للسيارة على نحو متواصل فى اليوم لاتقل عن ٣ ساعات، ولاتزيد عن ٧ ساعات، وكانت فترات قيادة فادى للسيارة على نحو متواصل فى اليوم لاتقل عن ساعتين ولاتزيد عن ٦ ساعات، وكان إجمالى زمن قيادة كليهما يوميًّا لايزيد عن ٨ ساعات. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثل بيانيًّا منطقة حل هذا النظام.

الحل

إسلام: عدد ساعات قيادة إسلام للسيارة على نحو متواصل لايقل عن ٣ ساعات ولايزيد عن ٧ ساعات.

نفرض أن س هى عدد ساعات قيادة إسلام للسيارة فيكون: ٣ ⩽ س ⩽ ٧.

فادى: عدد ساعات قيادة فادى للسيارة لاتقل عن ساعتين ولاتزيد عن ٦ ساعات. نفرض أن ص هى عدد ساعات قيادة فادى للسيارة فيكون: ٢ ⩽ ص ⩽ ٦

إجمالى زمن قيادة كليهما يوميًّا لايزيد عن ٨ ساعات فيكون:

س + ص ⩽ ٨

مثل مجموعة حل كل من المتباينات الثلاث بيانيًّا،

أى زوج مرتب فى منطقة حل النظام يمثل حلًّا للنظام؟

من الحلول الممكنة:

٣ ساعات قيادة لفادى، ٥ ساعات قيادة لإسلام. ساعتان قيادة لفادى، ٦ ساعات قيادة لإسلام.

٥ ساعات قيادة لفادى، ٣ ساعات قيادة لإسلام. ٣ ساعات قيادة لفادى، ٤ ساعات قيادة لإسلام.

عدد ساعات قيادة فادى

عدد ساعات قيادة إسلام

تحقق من فهمك

الربط بالمهن: يريد نجار شراء نوعين من المسامير، ولا يريد دفع أكثر من ٤٨ جنيهًا ثمنًا للشراء، فإذا كان النجار يحتاج ٣ كيلو جرامات على الأقل من النوع الأول، وكيلو جرامًا واحدًا على الأقل من النوع الثانى، فما المبلغ الذى سيدفعه النجار ثمنًا لكل نوع، إذا علمت أن ثمن الكيلو جرام الواحد من النوع الأول هو ٦ جنيهات، وثمن الكيلو جرام الواحد من النوع الثانى هو ٨ جنيهات؟

أ اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يصف هذا الموقف.

ب مثل بيانيًّا هذا النظام لتوضيح الحلول الممكنة.

ج سمِّ نقطة تكون حلًّا لهذا النظام.

د سمِّ نقطة لا تكون حلًّا لهذا النظام.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (٤٦) مع متابعة إجاباتهم

إجابات «حاول ان تحل» صفحة (٤٦)

٣ كمثال؛ ٢٠ مترًا × ٨٠ مترًا؛ ٢٠ مترًا × ١٢٠ مترًا؛ ٧٠ مترًا × ٨٥ مترًا. المسألة لها عدد لانهائى من الحلول.

٤ لان الطول والعرض لايمكن أن يكونا سالبين.

ناقش مع طلابك المثال (٤) صفحة (٤٧) من كتاب الطالب والحلول الممكنة لهذا النظام – اطلب إلى طلابك إعطاء حلول غير ممكنة لهذا النظام مع التفسير.

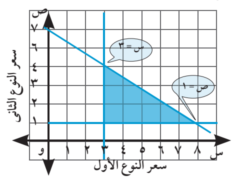
التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ ٠,٦ س + ٠,٥٥ ص ⩽ ٣٣

س ⩾ ٩   ص ⩾ ١٢

ب



ج كمثال: (٢٠، ٢٠)

د كمثال: (٤٠، ٢٥)

التقييم

اطلب إلى طلابك حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا:

١ ص ⩾ ١- ، س ⩾ ١-

٢ ص > ٣س ، س ⩽ ٢

٣ س + ص ⩾ ٥ ، ص ⩽ ١

أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين:

١ اكتب نظامًا من المتباينات الخطية ليس له حل.

٢ اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يكون حله خطًّا مستقيمًا.

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط صفحة (٤)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يكتب الطالب المسألة والمتباينات الدالة عليها بصورة صحيحة، ثم يحل النظام حلًّا صحيحًا.
جيد جدًّا ٨ درجات	يحتاج الطالب لمساعدة طفيفة لكتابة المسألة والمتباينات الدالة عليها بصورة صحيحة، ثم يحل النظام حلًّا صحيحًا.
جيد ٧ درجات	يحتاج الطالب لمساعدة لكتابة المسألة والمتباينات الدالة عليها بصورة صحيحة، وأيضًا لحل النظام حلًّا صحيحًا.
مقبول ٥ درجات	يحتاج الطالب لمساعدة كبيرة لكتابة المسألة والمتباينات الدالة عليها بصورة صحيحة، وأيضًا لحل النظام حلًّا صحيحًا.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب كتابة المسألة، ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

٢ - ٣

البرمجة الخطية والحل الأمثل

Linear programing and Optimization

خلفية

سبق أن درس، الطالب كيفية حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا وفى هذا الدرس سوف يدرس كيفية استخدام البرمجة الخطية فى حل بعض المسائل.

أهداف الدرس

فى نهاية الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل بعض المسائل.
- يترجم معلومات خاصة بمشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب مع ترجمة البيانات، و تحديد دالة الهدف وحلها الأمثل.

مفردات أساسية

برمجة خطية – قيود – محدود – غير محدود – حل أمثل.

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعلمية – طباشير ملون – آلة حاسبة علمية – ورق مربعات.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٤٨ إلى صفحة ٥٤.

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ١٩ إلى صفحة ٢٠.

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

اعرض على طلابك ما يلى:

يصف مدير إحدى خطوط الطيران أقصى حجم مسموح به لحجرة الأمتعة باستخدام الصيغة:

ل + ع + ف ⩽ ٣٧٥سم

أسأل طلابك ماذا تعنى هذه الصيغة؟

---

٢ - ٣

البرمجة الخطية والحل الأمثل

Linear programing and Optimization

سوف تتعلم

- إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- استخدام البرمجة الخطية فى حل بعض المسائل.
- ترجمة معلومات خاصة بمشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب مع ترجمة البيانات فى صورة متباينات خطية وتحديد منطقة الحل بيانيًّا، مع تحديد دالة الهدف وحلها الأمثل.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- برمجة خطية linear programing
- القيود Constrains
- محدود Bounded
- غير محدود Unbounded
- الحل الأمثل Optimize

الأدوات والوسائل

- ورق رسم بيانى.
- ألوان رصاص.

عمل تعاونى

افترض أنه عرض عليك وظيفة لبعض الوقت، وأنت تفكر ما الوقت الذى يمكنك تخصيصه لهذا العمل. يمكنك استخدام الرياضيات لتساعدك على تنظيم تفكيرك واتخاذ القرار السليم.

اعمل مع زميل لك:

١- (أ) اكتب قائمة بالطرق التى تقضى بها أوقاتك خلال الأسبوع.

(ب) نظم قائمتك بحيث لاتزيد عن عشرة طرق.

٢- اعمل تقويمًا شخصيًّا للأسبوع الماضى.

(أ) حدد وقتًا للطرق التى حددتها فى البند رقم (١).

(ب) ما الوقت الذى تراه مناسبًا للعمل فى وظيفة بعض الوقت؟

(جـ) ناقش: ما الذى يمكنك الإقلاع عنه أو عدم الإقلاع عنه فى جدولك؟

تعلم

البرمجة الخطية Linear Programing

يمكنك الإجابة عن أسئلة مثل المطروحة أعلاه باستخدام عملية تسمى البرمجة الخطية Linear programing.

ولحل مسائل البرمجة الخطية فإن أول عمل يجب القيام به هو كتابة البرنامج الخطى للمسألة، ويتكون من:

١- دالة الهدف (وهى ما تهدف إليه المشكلة محل الدراسة لحساب قيمة عظمى أو قيمة صغرى)، وهى دالة خطية تكون على الصورة:

ر = أ س + ب ص حيث أ، ب عددان حقيقيان لايساويان الصفر معًا.

٢- مجموعة القيود التى تفرضها طبيعة المسألة، وهى فى صورة متباينات خطية بمتغيرين تمثل الحدود العليا أو الدنيا للعوامل التى تتحكم بمتغيرات المسألة.

٣- القيود التى يفرضها الواقع العلمى للمسألة على المتغيرات عندما لا يمكن أن تأخذ هذه المتغيرات قيمًا سالبة.

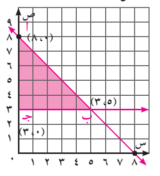
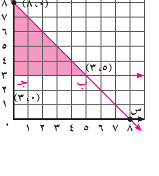
٤٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثال

(١) باستخدام البرمجة الخطية أوجد قيمتى س، ص التى تجعل قيمة الدالة ر = ٣س + ٢ص قيمة عظمى ثم قيمة صغرى تحت القيود: س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٨ ، ص ⩾ ٣

الحل

الخطوة (١): ارسم القيود (مثل المتباينات بيانيًّا)

الخطوة (٢): أوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

من الشكل نلاحظ أن رؤوس منطقة الحل هى:

أ(٠، ٨)، ب (٥، ٣)، جـ (٠، ٣)

الخطوة (٣): أوجد قيمة الدالة ر = ٣ س + ٢ ص عند كل رأس

نكون الجدول التالى:

النقطة	س	ص	٣س + ٢ص	قيمة الدالة ر	
أ (٠، ٨)	٠	٨	٣ (٠) + ٢ (٨)	١٦	
ب (٥، ٣)	٥	٣	٣ (٥) + ٢ (٣)	٢١	← قيمة عظمى
جـ (٠، ٣)	٠	٣	٣ (٠) + ٢ (٣)	٦	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوى ٢١ وتكون عند النقطة (٥، ٣)، والقيمة الصغرى للدالة تساوى ٦ وتكون عند النقطة (٠، ٣)

فكر: لماذا تتحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف عند أحد رؤوس منطقة الحل؟

لتعرف إجابة هذا التساؤل:

١- نضع ر = ٠ فى دالة الهدف ر = ٣س + ٢ص فنجد أن ٣س + ٢ص = ٠ تمثل مستقيمًا يمر بنقطة الأصل، والنقطة (٢، -٣).

٢- إذا رسمت عدة مستقيمات تقطع منطقة الحل وموازية لهذا المستقيم المار بنقطة الأصل فإن:

أول هذه المستقيمات يمر بالنقطة جـ (٠، ٣)

وتكون معادلته ٣س + ٢ص = ٦ أى ر = ٦

٣- قيمة ر عند جميع النقط التى تنتمى إلى المستقيم الثانى المار بالنقطة أ (٠، ٨) تساوى ١٦، و تستمر ر فى التزايد حتى نصل إلى آخر خط يقطع منطقة حل النظام والمار بالنقطة ب (٥، ٣) ، فنجد أن ر = ٣ × ٥ + ٢ × ٣ = ٢١

لذلك فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف = ٦ عند النقطة (٠، ٣) وهى أحد رؤوس منطقة الحل، وكذلك القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢١ عند النقطة (٥، ٣) وهى أحد رؤوس منطقة الحل أيضًا.

مما سبق نستنتج أن: القيمة العظمى والقيمة الصغرى إن وجدتا لدالة الهدف، فإنهما تتحققان عند رؤوس المضلع الذى يحيط منطقة الحلول الممكنة للمتباينات التى تشكل مجموعة قيود المسألة أو عند نقط إلتقاء المستقيمات التى تحد منطقة الحلول الممكنة.

٤٩ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى

حاول أن تحل

(١) باستخدام البرمجة الخطية أوجد كلًّا من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى للدالة ر = س + ص تحت القيود:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص ≥ ٢ س − ٢ ، ص ≤ −س + ٨

(٢) **من الشكل المقابل:** أوجد قيمتى س، ص التى تجعل قيمة الدالة ر = ٢ س + ٥ ص قيمة صغرى.



تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

Real life applications of linear programing

البرمجة الخطية طريقة رياضية تمكننا من الوصول إلى أفضل قرار لحل مشكلة حياتية أو الوصول إلى الحل الأمثل Optimization؛ لتحقيق هدف معين مثل تحقيق أقل تكلفة أو أعلى ربح لمشروع معين، مع الالتزام بشروط وقيود آليات الإنتاج والسوق أو المشكلة محل الدراسة، ويمكن تحقيق ذلك من خلال:

١- تحليل الموقف أو المشكلة لتحديد المتغيرات، والتعرف على القيود ووضعها فى صورة نظام من المتباينات الخطية.
٢- كتابة دالة الهدف المراد تحقيقه فى المشكلة موضع الدراسة (وهى دالة خطية).
٣- تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا.
٤- تحديد رؤوس منطقة الحل.
٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف، ثم نختبر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى تبعًا للمطلوب فى المسألة.



(٢) إدارة الأعمال يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ، ب، ولاتقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة، كما أنه لايستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ)، أو أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب)، فإذا علمت أن ثمن شراء السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات، كم سمكة من كل من النوعين أ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء؟

الحل

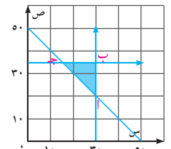
١- نفرض أن: عدد الأسماك من النوع (أ) هو س، عدد الأسماك من النوع (ب) هو ص

ويكون س ≥ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع أ)
ص ≥ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع ب)
س + ص ≥ ٥٠ (هو يحتاج ٥٠ سمكة على الأقل)
س ≤ ٣٠ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٠ سمكة من النوع أ)
ص ≤ ٣٥ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٥ سمكة من النوع ب)

	النوع الأول	النوع الثاني	الحد الأقصى
	س	ص	٥٠
ثمن الشراء	٤	٣	٤س + ٣ص



٢- نكتب **دالة الهدف** وهى: ثمن الشراء أقل ما يمكن: ر = ٤ س + ٣ ص
٣- نمثل نظام المتباينات بيانيًّا كما هو موضح بالشكل المقابل.
٤- نحدد رؤوس منطقة الحل وهي:
أ (٣٠، ٢٠)، ب (٣٠، ٣٥)، جـ (١٥، ٣٥).
٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف لتحديد أقل ثمن ممكن للشراء، كما هو موضح بالجدول التالي:



النقطة	س	ص	٤س + ٣ص	قيمة الدالة ر
أ (٣٠، ٢٠)	٣٠	٢٠	٤ (٣٠) + ٣ (٢٠)	١٨٠
ب (٣٠، ٣٥)	٣٠	٣٥	٤ (٣٠) + ٣ (٣٥)	٢٢٥
جـ (١٥، ٣٥)	١٥	٣٥	٤ (١٥) + ٣ (٣٥)	١٦٥

← أقل قيمة ممكنة لثمن الشراء

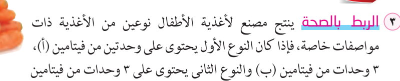
يجب على صاحب محل الأسماك شراء ١٥ سمكة من النوع (أ)، ٣٥ سمكة من النوع (ب) ليكون ثمن الشراء أقل ما يمكن.

حاول أن تحل

(٣) الربط بالصناعة: ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًّا على الأكثر من نوعين مختلفين أ، ب، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهًا وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه، وكان مايباع من النوع الأول لايقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثاني. أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

مثال

(٣) الربط بالصحة ينتج مصنع لأغذية الأطفال نوعين من الأغذية ذات مواصفات خاصة، فإذا كان النوع الأول يحتوى على وحدتين من فيتامين (أ)، ٣ وحدات من فيتامين (ب) والنوع الثانى يحتوى على ٣ وحدات من فيتامين (أ)، ووحدتين من فيتامين (ب)، وإذا كان الطفل يحتاج فى غذائه على الأقل ١٢٠ وحدة من فيتامين (أ)، ١٠٠ وحدة من فيتامين (ب) وكانت تكلفة النوع (أ) ٥ جنيهات، وتكلفة النوع (ب) ٤ جنيهات، فما الكمية الواجب شراؤها من كل من النوعين لتحقيق ما يحتاجه الطفل فى غذائه بأقل تكلفة ممكنة؟



الحل

١- نفرض أن: عدد السلع من النوع الأول س وعدد السلع من النوع الثانى ص ويكون:
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
٢ س + ٣ ص ≥ ١٢٠
٣ س + ٢ ص ≥ ١٠٠

الصنف	عدد السلع من النوع الأول	عدد السلع من النوع الثاني	الحد الأدنى من الوحدات
فيتامين أ	٢ س	٣ ص	١٢٠
فيتامين ب	٣ س	٢ ص	١٠٠
التكاليف	٥ جنيهات	٤ جنيهات	

عمل تعاوني

- في هذا النشاط، يستخدم الطالب المهارات المرتبطة بالعمل مثل: الوقت – تحليل الإدارة – التنظيم.

التنوع : سؤال رقم (١)

قد لا يكون لدى بعض الطلاب وقتًا متاحًا للقيام بوظيفة بعض الوقت وذلك لوجود مسئوليات أخرى، اقترح عليهم عمل قائمة لشخص تخيلي.

عرض الدرس

تعلم: البرمجة الخطية

في المثال رقم (١) ربما يتساءل بعض الطلاب عن تفسير يوضح لماذا تكون القيم العظمى والصغرى عند الرؤوس. وللإجابة عن هذا السؤال، وضح التمثيلات البيانية للمعادلة ر = ٣س + ٢ص لقيم ر عند الرؤوس، وذلك على نفس الشكل البياني الذي يوضح القيود.

ونلاحظ أن كل النقط التي تحقق القيود تقع بين أقصى مستقيمين متوازيين، واللذان يمران بالنقطتين اللتين للدالة عندهما قيمة عظمى (٥، ٣)، وقيمة صغرى (٠، ٣).

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند «حاول أن تحل» صفحة (٥٠) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل صفحة (٥٠)

(١) القيمة الصغرى صفر، القيمة العظمى ٨
(٢) (٣، ٠)

تعلم: تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

ناقش مع طلابك كيفية حل مسائل البرمجة الخطية وذلك باتباع الخطوات الموضحة صفحة (٥٠) من كتاب الطالب، ثم ناقش معهم المثال الوارد صفحة (٥٠) موضحا كيفية تطبيق هذه الخطوات.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد في بند «حاول أن تحل» صفحة (٥١) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول ان تحل صفحة (٥١).

٥ دواليب من النوع الأول، ١٥ دولاب من النوع الثاني.
ناقش مع طلابك المثال الوارد صفحة (٥١) من كتاب الطالب وهو تطبيق حياتي يشمل الربط بالمستهلك.

التقييم المستمر

اطلب إلى طلابك حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» صفحة (٥٣) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

إجابات حاول أن تحل صفحة (٥٥)

الكمية الواجب شراؤها هى ٣ وحدات من السلعة الأولى، ٥ وحدات من السلعة الثانية.

نشاط

- ناقش مع طلابك النشاط الموضح صفحة (٥٤) من كتاب الطالب ويتناول وجود أكثر من قيمة متساوية فى حالة ما إذا كان أحد أضلاع منطقة يوازى المستقيم الممثل لدالة الهدف.
- تابع إجابات طلابك على الأسئلة المطروحة مع تصحيح ما يرد من أخطاء فردية فى حينها.

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

٣ كجم من السماد أ، ٢ كجم من السماد ب.

التقييم

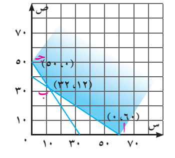
أطلب إلى الطلاب حل المسائل التالية:

(١) استخدم البرمجة الخطية لإيجاد قيمتي س، ص التى تجعل للدالة $ر = ٢س - ص$ قيمة عظمى تحت القيود:
$ص \geqslant ١$، $ص \leqslant -٢س$، $س \geqslant -٢$

(٢) قررت أنك سوف تحتاج على الأقل ٢٥ جالونًا من الدهان، لإعادة دهان منزلك، منهم على الأقل ٥ جالونات من اللون الأزرق، و ١٠ جالونات على الأقل من اللون الأبيض، فإذا كان ثمن الجالون من اللون الأزرق ٣٥ جنيهًا، وثمن الجالون من اللون الأبيض ٥٠ جنيهًا، فما عدد الجالونات التى يمكنك شراؤها من كل نوع لتكون جملة مشترواتك أقل ما يمكن؟

٢- دالة الهدف هى التكلفة أقل مايمكن: $ر = ٥ س + ٤ ص$

٣- نمثل نظام المتباينات الخطية كما هو موضح بالشكل المقابل.



٤- رؤوس منطقة الحل هي:
أ (٦٠، ٠)، ب (١٢، ٣٢)، جـ (٠، ٥٠).

٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس فى دالة الهدف لتحديد أقل تكلفة ممكنة:

النقطة	س	ص	٥س + ٤ص	قيمة الدالة ر
أ (٦٠، ٠)	٦٠	٠	٥ (٦٠) + ٤ (٠)	٣٠٠
ب (١٢، ٣٢)	١٢	٣٢	٥ (١٢) + ٤ (٣٢)	١٨٨ ← أقل تكلفة ممكنة
جـ (٠، ٥٠)	٠	٥٠	٥ (٠) + ٤ (٥٠)	٢٠٠

تكون التكلفة أقل ما يمكن عند ب، عدد الأغذية من النوع الأول هو ١٢ وعدد الأغذية من النوع الثانى هو ٣٢

مثال

(٤) **الربط بالمستهلك:** ينتج مصنع نوعين من المكاتب الصاج وكل نوع يقوم بتجميعه أحد العمال ثم يقوم عامل آخر بالدهان. يستغرق العامل الأول ساعتين لتجميع الوحدة من النوع الأول، و٣ ساعات لتجميع الوحدة من النوع الثانى، بينما يستغرق العامل الثانى ساعة ونصف الساعة لدهان الوحدة من النوع الأول وساعتين لدهان الوحدة من النوع الثانى، فإذا كان العامل الأول يعمل ٦ ساعات يوميًّا على الأقل ،بينما يعمل العامل الثانى ٦ ساعات يوميًّا على الأكثر، وكان ربح المصنع هو ٥٠ جنيهًا فى كل وحدة من كل من النوعين، فما عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها المصنع يوميًّا من كلا النوعين ليحقق أكبر ربح ممكن؟

الحل

نفرض أن عدد الوحدات من النوع الأول س
وعدد الوحدات من النوع الثانى ص

عدد الوحدات	ساعات التجميع	ساعات الدهان	الربح بالجنيه
النوع الأول س	٢	$١\frac{١}{٢}$	٥٠
النوع الثانى ص	٣	٢	٥٠

فيكون $س \geqslant ٠$ ، $ص \geqslant ٠$

$٢ س + ٣ص \geqslant ٦$

$١\frac{١}{٢}س + ٢ص \leqslant ٦$ أى $٣ س + ٤ ص \leqslant ١٢$

دالة الهدف: الربح أكبر ما يمكن $ر = ٥٠ س + ٥٠ ص$

النقطة	س	ص	٥٠ س+ ٥٠ص	قيمة الدالة ر
أ (٠، ٢)	٠	٢	٥٠(٠) + ٥٠ (٢)	١٠٠
ب (٣، ٠)	٣	٠	٥٠(٣) + ٠ (٠)	١٥٠
جـ (٤، ٠)	٤	٠	٥٠(٤) + ٠ (٠)	٢٠٠ ← أكبر ربح ممكن
ى (٠، ٣)	٠	٣	٠(٠) + ٣ (٥٠)	١٥٠

∴ أكبر ربح ممكن = ٢٠٠ جنيه عند النقطة (٤، ٠)

حاول أن تحل

(٤) **الربط بالمستهلك:** سلعتان غذائيتان تعطى الأولى ٣ سعرات حرارية وبها ٥ وحدات من فيتامين سى والثانية تعطى ٦ سعرات حرارية ولها وحدتان من فيتامين سي. فإذا كان المطلوب هو ٣٦ سعرًا حراريًّا على الأقل، ٢٥ وحدة من فيتامين سى على الأقل، وبفرض أن سعر الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهات ومن الثانية ٨ جنيهات، فما الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ممكنة؟

تحقق من فهمك

الربط بالزراعة: وجد مزارع أنه يمكن تحسين نوعية مزروعاته إذا استخدم على الأقل ١٦ وحدة من النيترات، ٩ وحدات من الفوسفات فى عملية التسميد للقيراط الواحد. يوجد فى الأسواق نوعان من السماد أ، ب موضحة محتوياتها وتكلفة كل منها فى الجدول التالي:

السماد	عدد الوحدات لكل كيلو جرام		التكلفة لكل كيلو جرام
	النترات	الفوسفات	
أ	٤	١	١٧٠ قرشًا
ب	٢	٣	١٥٠ قرشًا

أوجد أقل تكلفة من مزيج السمادين أ، ب تمكنان المزارع من توفير العدد الكافى من وحدات النيترات والفوسفات لتحسين نوعية مزروعاته.

نشاط

إذا كان المستقيم الذى يمثل دالة الهدف يوازى أحد أضلاع منطقة الحل، هل تتغير قيمة دالة الهدف عند أى نقطة على هذا الضلع؟

تتبع المثال الآتى ثم أجب عن السؤال المطروح

مثال

٥ أوجد أقصى قيمة ممكنة للدالة ر = ٣س + ٦ص تحت القيود التالية:

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٥ ، ٢س + ص ⩽ ٦ ، س + ٢ص ⩽ ٨

الحل

نرسم $ل_١$: س = ٠ ، $ل_٢$: ص = ٠

$ل_٣$: س + ص = ٥

س	٠	٥
ص	٥	٠

$ل_٤$: ٢س + ص = ٦

س	٠	٣
ص	٦	٠

$ل_٥$: س + ٢ص = ٨

س	٠	٨
ص	٤	٠

المنطقة الملونة بالشكل هى و أ ب جـ تمثل مجموعة حل النظام حيث: ب($\frac{٤}{٣}$، $\frac{١٠}{٣}$) لماذا؟

النقطة	س	ص	٣س + ٦ص	قيمة الدالة ر
أ	٣	٠	٣ × ٣ + ٠	٩
ب	$\frac{٤}{٣}$	$\frac{١٠}{٣}$	٣ × $\frac{٤}{٣}$ + ٦ × $\frac{١٠}{٣}$	٢٤
جـ	٠	٤	٣ × ٠ + ٦ × ٤	٢٤

لاحظ أن: القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢٤ تحققت عند النقطتين ب، جـ

١- هل المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يوازى المستقيم الذى يمثل دالة الهدف؟ فسِّر إجابتك.

٢- أوجد قيمة دالة الهدف عند منتصف $\overline{ب جـ}$، ماذا تلاحظ؟

٣- هل العبارة التالية صحيحة؟ فسر إجابتك.

«إذا وقعت القيمة العظمى (أو الصغرى) عند نقطتين فى منطقة حل النظام فهى تقع عند جميع نقاط القطعة المستقيمة الواصلة بينهما».

٥٤ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

٥ الربط بالمهن: لدى أحد الخياطين ١٠ أمتار من قماش الكتان، ٦ أمتار من قماش قطنى، ويريد الخياط تفصيل نوعين من الملابس من المواد المتوافرة لديه، النوع الأول من الملابس يحتاج إلى متر واحد من الكتان، ومتر واحد من القطن، ويحقق ربحًا قدره ٣ جنيهات، بينما يحتاج النوع الثانى إلى ٢ متر من الكتان ومتر واحد من القطن، ويحقق ربحًا قدرة ٤ جنيهات. ما الكمية التى يجب عليه تفصيلها من كل نوع حتى يحقق الخياط أكبر ربح ممكن؟

٦ الربط بالموسيقى: ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ، يحتاج تصنيع النوع الأول إلى ٢٥ وحدة من النحاس، ٤ وحدات من النيكل، ويحتاج تصنيع النوع الثاني ١٥ وحدة من النحاس، ٨ وحدات من النيكل، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع فى أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس، ٣٢ وحدة من النيكل، وكان ربح المصنع فى الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهًا وربحه فى الآلة من النوع الثاني ٤٨ جنيهًا، فما عدد الآلات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن؟

٧ الربط بالسياحة: أقامت إحدى شركات السياحة جسرًا جويًّا لنقل السائحين. ذلك لنقل ١٦٠٠ سائح، ٩٠ طنًّا من الأمتعة بأقل تكلفة، وكان المتاح نوعين من الطائرات أ، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من النوع أ، ١٢ طائرة، وعدد الطائرات المتاحة من النوع ب ٩ طائرات، وكانت الحمولة كاملة للطائرة من النوع أ ٢٠٠ شخص، ٦ أطنان من الأمتعة، والحمولة الكاملة للطائرة من النوع ب ١٠٠ شخص، ١٥ طنًّا من الأمتعة، وكان إيجار الطائرة من النوع أ هو ٣٢٠ ٠٠٠ جنيه، ومن النوع ب هو ١٥٠ ٠٠٠ جنيه، فكم طائرة من كل نوع يمكن للشركة استئجارها؟

أنشطة

٨ ارجع إلى مكتبتك المدرسية أو الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) واكتب مثالًا يوضح استخدامات البرمجة الخطية فى كل من المجالات التالية:

أ الاقتصاد ب الصناعة جـ إدارة الوقت د بحوث العمليات

٩ اكتب مسألة من عندك يتطلب حلها كتابة أربع متباينات خطية، ثم مثل منطقة الحل بيانيًّا. اكتب دالة الهدف لمسألتك، وحدد متى يكون لها قيمة عظمى، أو قيمة صغرى، ثم أوجد هاتين القيمتين.

٢٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

نشاط إضافى للطلاب المتفوقين

تعتبر البرمجة الخطية وسيلة فعالة فى إدارة الأعمال، بالاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) خطط لمشروع لادارة الأعمال مثل ما ورد فى بعض مسائل هذا الدرس، حدد كلًّا من التكاليف والأرباح المتوقعة للوصول لأقصى ربح ممكن.

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط (١) صفحة (٦)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يكتب الطالب أمثلة جيدة فى المجالات الأربعة المحددة.
جيد جدًّا ٨ درجات	يكتب الطالب امثلة جيدة فى ثلاثة مجالات مختلفة من الأربعة.
جيد ٧ درجات	يكتب الطالب أمثلة جيدة فى مجالين فقط من المجالات الأربعة.
مقبول ٥ درجات	يكتب الطالب أمثلة جيدة فى مجال واحد فقط من المجالات الأربعة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب كتابة أي أمثلة فى أى من المجالات الأربعة.

نشاط (٢) صفحة (٦)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يكتب الطالب المسألة والمتباينات ويمثل منطقة الحل بيانيًّا ويكتب دالة الهدف ويحدد القيمتين العظمى والصغرى للدالة.
جيد جدًّا ٨ درجات	يكتب الطالب المسألة والمتباينات ويمثل منطقة الحل بيانيًّا ويكتب دالة الهدف، ولكنه يحتاج مساعدة طفيفة لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى للدالة.
جيد ٧ درجات	يحتاج الطالب مساعدة لكتابة المسألة، ولكنه يكتب المتباينات ويمثل منطقة الحل بيانيًّا ويكتب دالة الهدف ويحدد القيمتين العظمى والصغرى للدالة.
مقبول ٥ درجات	يحتاج الطالب مساعدة كبيرة لكتابة المسألة وكتابة المتباينات وتمثيل منطقة الحل بيانيًّا وكتابة دالة الهدف وتحديد القيمتين العظمى والصغرى للدالة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب أداء ما هو مطلوب منه ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

الوحدة الثالثة

المتجهات

Vectors

مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة نفرق بين نوعين من الكميات الفيزيائية، والتى تظهر كثيرًا فى الحياة العلمية، فهناك كميات لا يحتاج وصفها إلا إلى معرفةالعدد الذي يعبر عن قيمتها وتعرف بالكميات القياسية مثل الطول، الكتلة، الزمن، درجة الحرارة، المساحة وعدد السكان، وكميات أخرى لايكفى لوصفها مجرد ذكر العدد الذى يدل على قيمتها، بل تتحدد بمقدار واتجاه، وتعرف بالكميات المتجهة، فسرعة جسم متحرك لها مقدار هو عدد وحدات المسافة (كيلومترات مثلًا) التى يقطعها الجسم المتحرك فى وحدة الزمن (ساعة مثلًا) ولها أيضًا اتجاه، وهو الاتجاه الذى يتحرك فيه الجسم.
من خلال هذه الوحدة يدرس الطالب المتجهات كمفهوم رياضى أولًا، ثم تطبيقات فى الهندسة والميكانيكا والفيزياء.
وتتضمن هذه الوحدة أربعة دروس هى كالآتى:

الدرس الأول: الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.

الدرس الثانى: المتجهات.

الدرس الثالث: العمليات على المتجهات.

الدرس الرابع: تطبيقات على المتجهات.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجه فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.
- يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.
- يحل تطبيقات فى الهندسة المستوية على المتجهات.

المصطلحات الأساسية

- كمية قياسية Scalar Quantities
- (كمية متجهة) Vector Quantities
- متجه Vector
- مسافة Distance
- إزاحة Displacement
- متجه موضع Position Vector
- زوج مرتب Orderd Pair
- قيمة مطلقة Absolute value
- معيار متجه Norm
- متجه مكافئ Equivalent Vector
- جمع المتجهات Adding vectors
- قاعدة المثلث The triangle Rule
- قاعدة متوازى الأضلاع Parallelogram Rule
- طرح المتجهات Subtracting Vectors
- قوة محصلة (محصلة القوى) Resultant Force
- سرعة نسبية Relative Velocity

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): الكميات القياسية، والكميات المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة.

الدرس (٣ - ٢): المتجهات .

الدرس (٣ - ٣): العمليات على المتجهات .

الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على المتجهات.

الأدوات المستخدمة

حاسب آلى - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - أدوات هندسية للرسم والقياس - خيوط - أثقال - دبابيس رسم.

نبذه تاريخية

وضع العرب اللبنة الأولى للهندسة التحليلية، فقد استخدموا الجبر فى حل بعض المشكلات الهندسية، كما استخدموا الهندسة فى حل المعادلات الجبرية فقدم ثابت بن قرة (٨٣٥ - ٩٠٠م) حلولًا هندسية لبعض المعادلات كما ربط الكِندى فى مؤلفاته بين الجبر والهندسة.

ومع بداية القرن السابع عشر ساهم كل من فيرمات Fermat (١٦٠١ - ١٦٦٥م)، ورينيه ديكارت Rene Descartes (١٥٩٦ - ١٦٥٠م) فى تبسيط الطرق الجبرية لحل المشكلات الهندسية استنادًا إلى أن الهندسة المستوية لها بعدان، فعبرا عن كل شيء فى أى شكل هندسى بدلالة طولين متغيرين رمزا لهما بالرمزين س، ص بالإضافة إلى بعض الكميات الثابتة التى يتيحها الشكل، مما ألبس الهندسة ثوبًا جديدًا عرف بالهندسة التحليلية (الإحداثية) والتى وظفت لاستنباط النظريات والحقائق وبرهنة صحتها بإسلوب جبرى، كما كانت من العوامل المساعدة على ظهور علمى التفاضل والتكامل بواسطة نيوتن Newton (١٦٤٢ - ١٧٢٧م) وليبنيز Leibinz (١٦٤٦ - ١٧١٦م)، وابتكار جبس Gibbs (١٨٣٩ - ١٩٠٣م) لتحليل المتجهات فى ثلاثة أبعاد.

مخطط تنظيمى للوحدة

الكميات
قياسية
متجهة
المتجهات
هندسيًا
جبريًا
قطعة مستقيمة موجهة
زوج مرتب
متجها الوحدة الأساسيين
الصورة القطبية
تساوى متجهين
جمع متجهين
طرح متجهين
ضرب قسمة بعدد حقيقى
توازى متجهين
تعامد متجهين
تطبيقات
هندسية
فيزيائية
براهين نظريات
حل مشكلات
محصلة قوى
اتزان قوى
السرعة النسبية

- يوجد معيار المتجه، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجهًا فى عدد حقيقى.
- يجمع ويطرح متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات) قاعدة متوازى الأضلاع.
- يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.
- يحل تطبيقات فى الهندسة المستوية على المتجهات مع أنشطة تتضمن تطبيقات فيزيائية، مثل توازن القوى والسرعة النسبية.

زمن تدريس الوحدة

١٢ ساعة.

الوسائل التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - طباشير ملون(أقلام ملونة) - حاسب آلى - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - أدوات رسم وقياس - آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

التعلم التعاونى - الطريقة الاستنباطية - العصف الذهنى - العرض والمناقشة - حل المشكلات.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الاستدلالى - التفكير المنطقى - التفكير الناقد - حل المشكلات - التفكير الإبداعى فى الرياضيات.

طرق التقييم المقترحة

أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وتمارين عامة على الوحدة واختبار الوحدة والاختبار التراكمى.

٣ - ١

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

Scalars, Vectors and Directed Line Segment

خلفية

سبق أن درس الطالب الانتقال فى المستوى .. وعرف أنه لتعيين صورة نقطة فى المستوى يلزم معرفة مقدار الانتقال واتجاهه، أى أنه لايكفى معرفة مقدار الانتقال فقط أو اتجاه الانتقال فقط لتعيين صورة نقطة. وفى هذا الدرس نوضح للطالب مفهوم كل من الكمية القياسية والكمية المتجهة وارتباط طول قطعة مستقيمة باتجاه معين فى المستوى بما يعرف بالقطعة المستقيمة الموجهة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يصنف ويميز الكميات القياسية والكميات المتجهة.
- يتعرف القطعة المستقيمة الموجهة (اتجاهها ومعيارها).
- يتعرف القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة.
- ينشئ قطعة مستقيمة موجهة مكافئة لقطعة مستقيمة موجهة أخرى فى المستوى الإحداثى.
- يعبر عن قطعة مستقيمة بدلالة طرفيها فى المستوى الإحداثى.

مفردات أساسية

كمية قياسية – كمية متجهة – قطعة مستقيمة موجهة – مسافة – إزاحة – معيار – اتجاه.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – أدوات هندسية للرسم والقياس – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – الطريقة الاستدلالية – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٥٨ إلى صفحة ٦٢

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢٦ إلى صفحة ٢٧

٣ - ١

الكميات القياسية والكميات المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة

Scalars, Vectors and Directed Line Segment

سوف تتعلم

- تصنيف وتميز الكميات القياسية والكميات المتجهة.
- مفهوم القطعة المستقيمة الموجهة واتجاهها ومعيارها.
- التعرف على القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة.
- إنشاء قطعة مستقيمة موجهة مكافئة لقطعة مستقيمة موجهة أخرى فى المستوى الإحداثى.
- التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة بدلالة طرفيها فى المستوى الإحداثى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- كمية قياسية Scalar quantity
- متجه (كمية متجهة) Vector quantity
- مسافة Distance
- إزاحة Displacement
- اتجاه Direction

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

مقدمة

هناك كميات لا يحتاج وصفها إلا إلى معرفة العدد الذى يعبر عن قيمتها مثل الطول والمساحة والحجم والكتلة والكثافة وعدد السكان ...... غير أنه توجد كميات أخرى لا يكفى لوصفها مجرد ذكر العدد الذى يدل على قيمتها، فمعرفة سرعة الرياح ليس كافيًا لحركة الطيران بل يجب تحديد اتجاه الرياح أيضًا. فحركة الرياح إذًا تقاس مقدارًا واتجاهًا، والقوة المؤثرة على جسم يختلف تأثيرها عليه ليس بمقدارها فحسب، بل باتجاهها أيضًا. وهكذا نجد أننا أمام نوعين من الكميات.

الكميات القياسية Scalar quantities

هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها فقط مثل الطول والمساحة ...

الكميات المتجهة Vector quantities

هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها واتجاهها مثل السرعة والقوة ...



إذا تحرك جسم من النقطة ا مسافة ٣ أمتار شرقًا ثم غير اتجاهه وسار ٤ أمتار شمالًا وتوقف عند النقطة جـ.

- كم المسافة التى قطعها الجسم أثناء حركته؟
- كم يكون بعد الجسم عن النقطة ا وهى النقطة التى بدأ منها الحركة؟

شمال
شرق
غرب
جنوب
ا
ب
جـ
٣ متر
٤ متر

لاحظ أن

- **المسافة** Distance هى كمية قياسية وهى ناتج ا ب + ب جـ أو جـ ب + ب ا.
- **الإزاحة** Displacement وهى المسافة بين نقطتى البداية والنهاية فقط وفى اتجاه واحد من ا إلى جـ، أى أن لوصف الإزاحة يلزم تحديد مقدارها ا جـ واتجاهها من ا إلى جـ

فالإزاحة إذاً كمية متجهة وهى المسافة المقطوعة فى اتجاه معين.

٥٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

إجراءات الدرس

التمهيد

- اطلب إلى طلابك حصر بعض وحدات القياس لكميات فيزيائية ومحاولة تصنيفها إلى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة العدد الذى يعبر عن قيمتها، وأخرى لايكفى لوصفها مجرد ذكر العدد الدال على قيمتها وناقش معهم مفهوم الكميات القياسية والكميات المتجهة.

عرض الدرس

فكر وناقش

يهدف «بند فكر وناقش» إلى التمييز بين المسافة والإزاحة، حيث تعد المسافة كمية قياسية، أما الإزاحة فهى كمية متجهة يلزم لتحديدها مقدارها واتجاهها معًا.

تعلم: الاتجاه

أكد لطلابك على ما يلى مستعينًا بما ورد فى صـ٥٩ من كتاب الطالب.

- كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا.
- الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملها مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان، والعكس صحيح.
- الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(١) المسافة = ٦ + ٤ + ٤ = ١٤ سم

الإزاحة = ٦سم فى اتجاه أب

(٢)
- (أ) متضادان فى الاتجاه.
- (ب) مختلفان فى الاتجاه.
- (جـ) متحدان فى الاتجاه.
- (د) متضادان فى الاتجاه.
- (هـ) مختلفان فى الاتجاه.
- (و) متحدان فى الاتجاه.

القطعة المستقيمة الموجهة

مستعينًا بما ورد فى صفحة ٦٠، ٦١، ٦٢ من كتاب الطالب أكد على ما يلى:

- القطع المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية، نقطة نهاية ، اتجاه.
- معيار القطعة المستقيمة الموجهة هو طولها ويرمز له بالرمز ||.............||

ونلاحظ أنه للقطعة المستقيمة الموجهة أب أو ب أ يكون || أ ب || = || ب أ || = أ ب.

- تتكافىء القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه.

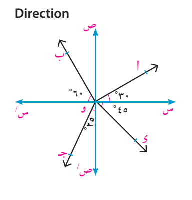
حاول أن تحل

(١) **فى الشكل المقابل**: احسب المسافة والإزاحة الحادثة عندما يتحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة جـ ثم يعود إلى النقطة ب.

أ ٦ سم ب ٤ سم جـ

الاتجاه

Direction



١- كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا، ففى الشكل المقابل:

و س يحدد اتجاه الشرق، و س/ يحدد اتجاه الغرب،

و ص يحدد اتجاه الشمال، و ص/ يحدد اتجاه الجنوب.

ما الاتجاهات التى يحددها كل من:

و أ ، و ب، و جـ، و ى ؟

٢- إذا كان أب // جـ ى ، هـ ∈ أب فإن:

- هـ أ ، ب هـ لهما نفس الاتجاه و يحملهما مستقيم واحد.
- هـ أ ، ى جـ لهما نفس الاتجاه و يحملهما مستقيمان متوازيان.
- هـ أ ، هـ ب فى اتجاهين متضادين و يحملهما مستقيم واحد.
- هـ أ ، جـ ى فى اتجاهين متضادين و يحملهما مستقيمان متوازيان.

وبصفة عامة فإن:
- الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان، والعكس صحيح.
- الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

حاول أن تحل

(٢) **فى الشكل المقابل**: أب ، جـ ى متوازيان وكل منهما لا يوازى س ص ، هـ ∈ أب ، و ∈ جـ ى ، ع ∈ س ص .

بين ما إذا كان الشعاعان فى كل مما يأتى متحدين فى الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه أو مختلفى الاتجاه.

(أ) أب ، ى و (ب) أب ، س ص (جـ) جـ ى ، هـ ب

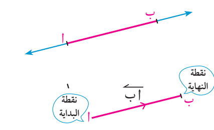
(د) ع ص، ع س (هـ) جـ و ، ع س (و) ع س ، ع ص

القطعة المستقيمة الموجهة

The Directed Line Segment

النقطتان أ، ب هما طرفا أب أو ب أ إذا حددنا إحدى هاتين النقطتين لتكون نقطة بداية للقطعة، والأخرى لتكون نقطة نهاية لها، فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه هو اتجاه الشعاع الذى يحمل هذه القطعة وتكون نقطة بدايته هى نفس نقطة البداية للقطعة.

فإذا حددنا النقطة أ لتكون نقطة بداية أب والنقطة ب هى نهايتها، فإننا نصف هذه القطعة بأنها قطعة مستقيمة موجهة من أ إلى ب ويرمز لها بالرمز أب .





- هل أب ≡ ب أ؟ هل أب ≡ ب أ ؟ فسر إجابتك.
- هل أب ، ب أ مختلفان أم متضادان فى الاتجاه ؟ ولماذا؟

تعريف ١ القطعة المستقيمة الموجهة: **هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية، و نقطة نهاية، و اتجاه.**

حاول أن تحل

(٣) أ، ب، جـ ثلاث نقط فى المستوى. اكتب كل القطع المستقيمة الموجهة التى تعينها هذه النقط.

تعريف ٢ معيار القطعة المستقيمة الموجهة: **معيار أب هو طول أب ويرمز له بالرمز || أب ||.**

لاحظ أن || أب || = || ب أ || = أ ب

تعريف ٣ تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين: **تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه.**

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(٣) أب ، ب أ
ب جـ، جـ ب
أجـ ، جـ أ

(٤) أولًا:

أ) أب تكافئ ء جـ
ب) جـ ء تكافئ ب أ
جـ) ب جـ تكافئ أ ء
د) أم تكافئ م جـ
هـ) م ء تكافئ ب م

ثانيًا:

أ) اختلاف المعيار ب ، جـ اختلاف الاتجاه

(٥) هـ (٢، ٠)، ل(٦، ٢)، ر = (-٣، ٣)

تجنب الخطأ

- قد يخطئ الطالب فى تحديد القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة فى نظام إحداثى متعامد.
- وضح لطلابك أنه إذا كانت أب تكافئ جـ ء ، فيكون لهما نفس الاتجاه ونفس المعيار، أى أن أب // جـ ء ، أب = جـ ء ويمكن التحقق من ذلك إذا كان ميل أب = ميل جـ ء وعدد وحدات الطول فى كل منهما متساويًا.

التدريب والتقييم

أولًا: إجابات تحقق من فهمك

(١) أ) صواب ب) خطأ جـ) خطأ
(٢) إجابات متنوعة

ثانيًا التقييم

ارسم قطعة مستقيمة موجهة س ص تكافئ ع ل ، حيث ع(٤، ١)، ل(١، ٥)، س(-١، -١). أوجد إحداثيي ص.

ثالثًا: التدريب

اطلب إلى طلابك حل بعض التمارين المتضمنة فى كتاب الأنشطة والتدريبات، مع متابعة إجاباتهم.

مثال

(١) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م. هـ ∈ أء فيكون:
أب // جـ ء ويساويه ، ب جـ // أء ويساويه،
م أ = م جـ = م ب = م ء

أ) ∵ ||أب|| = ||ء جـ|| واتجاه أب هو نفس اتجاه ء جـ ∴ أب تكافئ ء جـ
ب) ∵ ||أم|| = ||م جـ|| واتجاه أم هو نفس اتجاه م جـ ∴ أم تكافئ م جـ
جـ) ∵ ||م أ|| = ||م ب|| واتجاه م أ مختلف عن اتجاه م ب ∴ م أ لا تكافئ م ب
د) ∵ ||أهـ|| ≠ ||ب جـ|| واتجاه أهـ هو نفس اتجاه ب جـ ∴ أهـ لا تكافئ ب جـ

حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م.
أولًا: اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ:
أ) أب ب) جـ ء جـ) ب جـ د) أم هـ) م ء
ثانيًا: بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة:
أ) أم ، أجـ ب) ب أ ، ء جـ جـ) ب م ، ء م

تفكير منطقى:

١- إذا كان أب تكافئ جـ ء ماذا تستنتج؟
٢- ما عدد القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها فى المستوى وكل منها تكافئ أب ؟
٣- من نقطة جـ فى المستوى كم قطعة مستقيمة موجهة يمكن رسمها وتكافئ أب ؟

لاحظ أنه:
توجد قطعة مستقيمة موجهة وحيدة يمكن رسمها من النقطة جـ (جـ ء مثلًا) بحيث تكون جـ ء تكافئ أب .

مثال

(٢) **القطع المستقيمة الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد:**
فى مستوى إحداثى متعامد عين النقط أ(-٢، ١)، ب(٢، ٣)، جـ(١، -٣)، ء(-١، ٤) ثم ارسم جـ هـ، ء ل كل منهما تكافئ أب . أوجد إحداثيى كل من هـ، ل.

الحل

لرسم جـ هـ تكافئ أب يجب أن تكون جـ هـ، أب لهما نفس الاتجاه، ونفس المعيار.
أى أن: جـ هـ // أب ، ||جـ هـ|| = ||أب|| = طول أب .
- نرسم جـ هـ // أب (ميل أب = ميل جـ هـ = $\frac{1}{2}$)
- نحدد طول جـ هـ = طول أب باستخدام الفرجار، أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية، فنجد أن هـ (٥، -١). بالمثل نرسم ء ل فنجد أن: ل (٣، ٦)

ص، ل، ء(-١، ٤)، ب(٢، ٣)، (-٢، ١)، أ، س، س، و، هـ، جـ(١، -٣)، ص

لاحظ أن: حيث إن الانتقال يحافظ على توازى المستقيمات، وأطوال القطع المستقيمة وباعتبار النقطة جـ صورة النقطة أ بالانتقال (١ - (-٢)، -٣ - ١) = (٣، -٤)
∴ لرسم جـ هـ تكافئ أب نجد أن جـ هـ هى صورة أب بالانتقال (٣، -٤)
ويكون إحداثى هـ = (٢ + ٣، ٣ + (-٤)) = (٥، -١)
باستخدام الانتقال: عين إحداثيى النقطة ر التى تجعل و ر تكافئ أب

حاول أن تحل

(٥) فى مستوى إحداثى متعامد عين النقط أ(٢، ٣)، ب(-٢، ٦)، جـ (٥، -٣)، ء(٢، ٥) ثم ارسم جـ هـ، ل ء ، و ر كل منها تكافئ أب ، وأوجد إحداثيى كل من هـ ، ل ، ر.

تحقق من فهمك

فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ
س، ص، ع منصفات أب ، ب جـ، جـ أ على الترتيب
أولاً: أى العبارات التالية صحيحة؟
أ) ||س ص|| = ||ع ص||. ب) س ص تكافئ ع ص. جـ) ب ص تكافئ ع س .
ثانيًا: اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلًّا من:
أ) ب س ب) أع جـ) س ع
د) جـ ص هـ) س ص و) ع ص

٣ - ٢

المتجهات

Vectors

خلفية

سبق أن درس الطالب القطعة المستقيمة الموجهة، وفى هذا الدرس يستكمل الطالب دراسته بالتعرف على مفهوم المتجه هندسيًّا وجبريًّا وجمع متجهين جبريًّا والتعرف على شرطى توازى وتعامد متجهين.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة إلى نقطة الأصل فى مستوى إحداثى متعامد.
- يعبر عن متجه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار متجه.
- يتعرف على المتجه الصفرى.
- يحدد متى يتكافأ متجهان.
- يجمع متجهين جبريًّا.
- يضرب قيمه فى عدد حقيقى.
- يعبر عن متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يحدد شرط توازى متجهين.
- يحدد شرط تعامد متجهين.
- يمثل متجهًا فى عدد حقيقى هندسيًّا.

مفردات أساسية

متجه – متجه موضع – زوج مرتب – قيمة مطلقة – معيار متجه – متجه مكافئ – جمع متجهات – صورة قطبية – متجه وحدة – مقدار.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – ورق رسم مربعات – آلة حاسبة.

طرق التدريس المقترحة

المناقشة – الطريقة الاستدلالية – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٦٣ إلى صفحة ٧٠

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٢٨ إلى صفحة ٢٩

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

---

٣ - ٢ المتجهات

Vectors

سوف تتعلم

- إيجاد متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل فى مستوى إحداثى متعامد.
- وضع متجه فى الصورة القطبية.
- إيجاد معيار متجه والتعرف على المتجه الصفرى.
- مفهوم تكافؤ متجهين وحل تمارين عليه.
- جمع متجهين جبريًا
- ضرب متجه فى عدد حقيقى.
- التعبير عن متجه بدلالة متجهى الوحدة الاساسيين.
- شرط توازى متجهين.
- شرط تعامد متجهين.
- ضرب متجه فى عدد حقيقى والتمثيل الهندسى له.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متجه (كمية متجهة) Vector
- متجه موضع Position Vector
- زوج مرتب Orderd Pair
- قيمة مطلقة Absolute Value
- معيار متجه Norm
- متجهات متكافئة Equivalent Vectors
- جمع المتجهات Addition of vector
- ضرب Multiplication
- صورة قطبية Polar Form
- متجه وحدة Unit Vector
- مقدار Magnitude

مقدمة

يمكن تعيين موضع النقطة أ فى المستوى الإحداثى المتعامد بمعرفة الزوج المرتب (س، ص) المناظر لها، حيث إن لكل نقطة فى المستوى الإحداثى موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و.

متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل: Position Vector

تعريف ٤ متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة.

مثال

١ فى الشكل المقابل: أ (٥، ٣)، ب(٤، –٣)، جـ (–٢، ٤) فيكون:

- $\overrightarrow{\text{و أ}}$ هو متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و، ويناظر الزوج المرتب (٥، ٣). ويكتب $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٥، ٣).
- $\overrightarrow{\text{و ب}}$ متجه الموضع لنقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل، حيث $\overrightarrow{\text{و ب}}$ = (٤، –٣) كما أن $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ = (–٢، ٤)

ملاحظة: نظرًا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية (و) فإنه يمكننا أن نرمز لمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}}$ بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}}$ ولمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{و ب}}$ بالرمز $\overrightarrow{\text{ب}}$ وهكذا وبذلك يكون: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، –٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (–٢، ٤).

معيار المتجه: هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه.

فإذا كان: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س، ص)

فإن: $\|\overrightarrow{\text{ر}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

إجراءات الدرس

التمهيد

- اسأل طلابك ... هل يمكن تعين موضع نقطة معلوم إحداثيها فى المستوى الاحداثى، وهل لكل نقطة وضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل فى المستوى الإحداثى المتعامد؟

عرض الدرس

مستعينًا بما ورد فى صفحات ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧ أكد على ما يلى:

- متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة.

ونظرًا لأن متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية (و) لذا نرمز لمتجهه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}}$ (على سبيل المثال) بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}}$.

- للتعبير عن متجه الموضع فى الصورة القطبية فإنه يجب حساب معيار المتجه وقياس الزاوية التى يصنعها هذا المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
ويكتب المتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ (على سبيل المثال) بالصورة القطبية كالآتي: $\overrightarrow{\text{و أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|، \theta)$
حيث θ بالقياس الدائرى.

ويكون إحداثيي النقطة أ فى المستوى الإحداثي المتعامد هما: $(\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جتا θ، $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جا $\theta)$ كذلك ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

- المتجهان المتكافئان هما المتجهان اللذان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه، وأن هناك عددًا غير منته من المتجهات التى تكافئ متجه ما.
- عناصر المجموعة ح^2 مع عملية الجمع والضرب فى عدد حقيقي والمعرفتين عليها تسمى متجهات.

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1، \text{أ}_2) + (\text{ب}_1، \text{ب}_2) = (\text{أ}_1 + \text{ب}_1، \text{أ}_2 + \text{ب}_2)$

ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $(\text{أ}_1، \text{أ}_2) = (\text{ك أ}_1، \text{ك أ}_2)$

التقييم المستمر

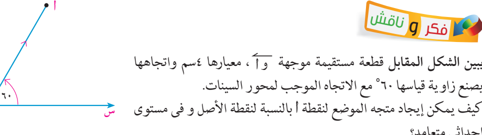
إجابات حاول أن تحل

(١) $\overrightarrow{\text{و أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} = (٢، -١)$، $\overrightarrow{\text{و ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} = (٥، ٠)$
$\overrightarrow{\text{و جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} = (-٢، -٣)$

حاول أن تحل

(١) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت أ(٢، -١)، ب(٥، ٠)، جـ(-٢، -٣) فأوجد متجه الموضع لكل منها بالنسبة لنقطة الأصل و، وارسم القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة له فى المستوى الإحداثى.



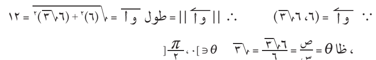


يبين الشكل المقابل قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{\text{و أ}}$، معيارها ٤سم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
كيف يمكن إيجاد متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و فى مستوى إحداثى متعامد؟

الصورة القطبية لمتجه الموضع Polar form of position Vector

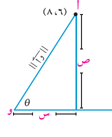
فى الشكل المقابل المتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات كما أن معياره يساوى $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$. فيمكن التعبير عنه كما يلي:

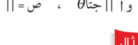
$\overrightarrow{\text{و أ}} = (\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|، \theta)$ وتعرف بالصورة القطبية للمتجه.



ويكون إحداثيا النقطة أ فى المستوى الإحداثى المتعامد هما:

س = $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جتا θ ، ص = $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ جا θ ويكون ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$





(٢) فى مستوى إحداثى متعامد إذا كانت أ(٦، ٦$\sqrt{٣}$). أوجد الصورة القطبية لمتجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و.

الحل

$\because \overrightarrow{\text{و أ}} = (٦، ٦\sqrt{٣})$ $\therefore \|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$ = طول $\overline{\text{و أ}} = \sqrt{(٦)^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢} = ١٢$

، ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٦\sqrt{٣}}{٦} = \sqrt{٣}$ $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore \theta$ = ظا$^{-١}(\sqrt{٣}) = ٦٠°$ $\therefore \overrightarrow{\text{و أ}} = (١٢، \frac{\pi}{٣})$

حاول أن تحل

(٢) أ إذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٨\sqrt{٣}، ٨)$ أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$.
ب إذا كان $\overrightarrow{\text{و جـ}} = (١٢\sqrt{٢}، \frac{٣\pi}{٤})$ متجه موضع لنقطة جـ بالنسبة لنقطة الأصل و، فأوجد احداثيي نقطة جـ

فكر: ما متجه الموضع لنقطة الأصل و(٠، ٠) فى مستوى إحداثى متعامد؟
المتجه الصفرى: يعرف $\overrightarrow{\text{و}}$ = (٠، ٠) بالمتجه الصفرى $\overrightarrow{٠}$
ويكون $\|\overrightarrow{\text{و}}\| = \|\overrightarrow{٠}\| = ٠$، والمتجه الصفرى غير معين الاتجاه.

٦٤ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

المتجهات

المتجهات المتكافئة Eequivalent Vectors

لنفرض أن جسمًا تحرك من أ حتى وصل إلى ب بعد أن قطع ٤ وحدات إلى اليمين، ٣ وحدات إلى أعلى. فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ تمثل متجه إزاحة الجسم من أ إلى ب.

يمكننا تمثيل $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ فى المستوى الإحداثى المتعامد بعدد غير منتهٍ من القطع المستقيمة الموجهة المتوازية والتى يكافئ كل منها $\overrightarrow{\text{أ ب}}$، ويكون إحداها متجه الموضع $\overrightarrow{\text{و ن}}$.

أى إن: $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$ = ... = $\overrightarrow{\text{و ن}}$ = (٤، ٣)

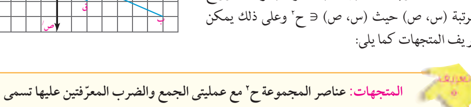
ويكون: $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ء هـ}}\|$ = ... = $\|\overrightarrow{\text{و ن}}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}$ = ٥ وحدات طول.

حاول أن تحل

(٣) فى الشكل المقابل:
أ عين متجه الموضع للنقطة جـ بالنسبة إلى نقطة الأصل و، ثم أوجد معياره.
ب حدد جميع عناصر مجموعة المتجهات التى يكافئ كل منها $\overrightarrow{\text{و جـ}}$.

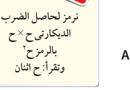
لعلك لاحظت ارتباط المتجهات بعناصر مجموعة الأزواج المرتبة (س، ص) حيث (س، ص) ∈ ح^٢ وعلى ذلك يمكن تعريف المتجهات كما يلى:





المتجهات: عناصر المجموعة ح^٢ مع عمليتى الجمع والضرب المعرّفتين عليها تسمى متجهات.

يرمز للمتجهات بأحد الرموز $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ .... مثل:
$\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (-٧، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٠، ٥) .... وهكذا

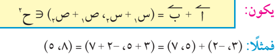


نرمز لحاصل الضرب الديكارتى ح × ح بالرمز ح^٢ وتقرأ: ح اثنان



جمع مجهين جبريًا Adding two Vectors Algebraically

لكل $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_١، \text{ص}_١) \in$ ح^٢ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_٢، \text{ص}_٢) \in$ ح^٢



يكون: $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_١ + \text{س}_٢، \text{ص}_١ + \text{ص}_٢) \in$ ح^٢

فمثلًا: (٣، -٢) + (٥، ٧) = (٣ + ٥، -٢ + ٧) = (٨، ٥)

٦٥ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

ولعملية الجمع الخواص التالية:

خاصية الانغلاق	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2
خاصية الإبدال	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$
خاصية التجميع أو الدمج	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ $\in$ ح^2 يكون $\overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$
خاصية وجود العنصر المحايد	لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 يوجد $\overrightarrow{و}$ = (٠، ٠) $\in$ ح^2 حيث: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ}$
خاصية توافر المعكوسات	لكل $\overrightarrow{أ}$ (س، ص) $\in$ ح^2 يوجد $-\overrightarrow{أ}$ = (−س، −ص) $\in$ ح^2 حيث: $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{و} = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ}$
خاصية الحذف	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ $\in$ ح^2 إذا كان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ}$ فإن $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{جـ}$

ضرب متجه فى عدد حقيقى
Multiplying a vectore by a real number

لكل $\overrightarrow{أ}$ = (س، ص) $\in$ ح^2 ، ولكل ك $\in$ ح : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س، ص) = (ك س، ك ص) $\in$ ح^2

فمثلًا: ٣(٢، −٥) = (٦، −١٥) ، $\frac{1}{2}$(٤، ٩) = (٢، $\frac{9}{2}$) ، ٤(٠، ٠) = (٠، ٠) ، −٢(٣، −٤) = (−٦، ٨)

ولعملية الضرب الخواص التالية:

خاصية التوزيع	أولًا: لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2، لكل ك $\in$ ح يكون: ك($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$ ثانيًا: لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 ، لكل $ك_1$، $ك_2$ $\in$ ح يكون: ($ك_1 + ك_2$) $\overrightarrow{أ}$ = $ك_1 \overrightarrow{أ} + ك_2 \overrightarrow{أ}$
خاصية التجميع أو الدمج	لكل $\overrightarrow{أ}$ $\in$ ح^2 ، لكل $ك_1$، $ك_2$ $\in$ ح يكون: ($ك_1 ك_2$) $\overrightarrow{أ}$ = $ك_1$($ك_2 \overrightarrow{أ}$)
خاصية الحذف	لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ $\in$ ح^2 ، لكل ك $\in$ ح* إذا كان ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن: $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ والعكس صحيح

لاحظ أن: إذا كان $\overrightarrow{م}$ = ($س_1$ ، $ص_1$) يكافئ $\overrightarrow{ن}$ = ($س_2$، $ص_2$)
فإن: $س_1 = س_2$، $ص_1 = ص_2$ (خاصية تساوى الأزواج المرتبة).
ونقول عندئذ أن المتجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ متساويان.

مثال

٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٦، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤، ٣)
أ أوجد $2\overrightarrow{أ} - 3\overrightarrow{ب}$
ب عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ = (١١، ٥) بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

أ $2\overrightarrow{أ} - 3\overrightarrow{ب}$ = ٢ (٦، −٢) − ٣(٤، ٣)
= (١٢، −٤) + (−١٢، −٩) = (٠، −١٣)

ب بفرض أن $\overrightarrow{جـ} = ك_1 \overrightarrow{أ} + ك_2 \overrightarrow{ب}$ حيث $ك_1$، $ك_2$ $\in$ ح
= $ك_1$ (٦، −٢) + $ك_2$(٤، ٣)
= ($6ك_1 - 2ك_1$) + ($4ك_2 + 3ك_2$) = ($6ك_1 + 4ك_2$، $-2ك_1 + 3ك_2$)

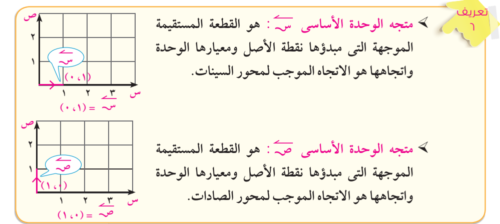
ومن خاصية تساوى زوجين مرتبين ينتج أن:
$6ك_1 + 4ك_2 = 11$ (١) ، $-2ك_1 + 3ك_2 = 5$ (٢)
بحل المعادلتين (١)، (٢) نجد أن: $ك_1 = \frac{1}{2}$ ، $ك_2 = 2$ $\therefore$ $\overrightarrow{جـ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{أ} + 2\overrightarrow{ب}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢، −٦)، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢، ٥)، $\overrightarrow{جـ}$ = (−٦، ١٤)
أ أوجد: $2\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{1}{2}\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$
ب عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$.

متجة الوحدة: هو متجه معياره الوحدة. Unit Vector

التعبير عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.


تعريف ٦
متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{س}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.
متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ص}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

إذا كان $\overrightarrow{م}$ = (س، ص)
$\therefore$ $\overrightarrow{م}$ = (س، ٠) + (٠، ص) من تعريف الجمع.
= س (١، ٠) + ص (٠، ١) من تعريف الضرب.
= س $\overrightarrow{س}$ + ص $\overrightarrow{ص}$
ويكون: $\|\overrightarrow{م}\| = \sqrt{س^2 + ص^2}$

مثال

٤ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين:
أ $\overrightarrow{م}$ = (٢، ٧) ب $\overrightarrow{ن}$ = (٤، −٣) جـ $\overrightarrow{ل}$ = (−٥، ٠) د $\overrightarrow{ع}$ = (٠، $-\frac{3}{2}$)

الحل

أ $\overrightarrow{م}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٧$\overrightarrow{ص}$ ب $\overrightarrow{ن}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$
جـ $\overrightarrow{ل}$ = −٥ $\overrightarrow{س}$ د $\overrightarrow{ع}$ = $\frac{-3}{2}$ $\overrightarrow{ص}$

٢ أ $\|\overrightarrow{وأ}\| = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (8)^2} = 16$

ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

θ = ٣٠°

$\overrightarrow{وأ}$ = (١٦، $\frac{\pi}{6}$)

ب بفرض أن $\overrightarrow{وجـ}$ = (س، ص)

$\therefore$ س = $\|\overrightarrow{وجـ}\|$ جتا θ ، ص = $\|\overrightarrow{وجـ}\|$ جا θ

س = $12\sqrt{2}$ × جتا ١٣٥° ، ص = $12\sqrt{2}$ × جا ١٣٥°

= $12\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}}$ = −١٢، = $12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ = ١٢

$\overrightarrow{وجـ}$ = (−١٢، ١٢)

تجنب الخطأ:

قد يخطئ الطالب فى التعبير فى متجه الموضع للنقطة ب(س، ص) فى مستوى إحداثى متعامد.

وضح لطلابك أن $\|\overrightarrow{وب}\| = ر = \sqrt{س^2 ، ص^2}$، θ = ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$ ويكون $\overrightarrow{ب}$ = ($\|\overrightarrow{ب}\|$، θ) حيث θ مقدرة بالتقدير الدائرى.

٣ أ $\overrightarrow{وجـ} = \overrightarrow{جـ}$ = (٥، ٢) ، $\|\overrightarrow{-ب}\| = \sqrt{29}$

ب $\overrightarrow{وجـ}$ يكافئ $\overrightarrow{ل ع}$ ، $\overrightarrow{ن م}$

٤ أ $2\overrightarrow{أ}$ = (٤، −١٢) ، $-\overrightarrow{ب}$ = (٢، −٥)
، $\frac{1}{2}\overrightarrow{جـ}$ = (−٣، ٧) ،
$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$ = (٦، −١٥)

ب $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + 4\overrightarrow{ب}$

متجه الوحدة

- أكد لطلابك أن متجه الوحدة هو متجه معياره الوحدة وأن متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{س}$ هو قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات ويعبر عنه بالزوج المرتب (١، ٠) فيكون $\overrightarrow{س}$ = (١، ٠).

وبالمثل

متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ص}$ = (٠، ١)، اطلب إلى طلابك وصف هذا المتجه.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٥ أ $\overrightarrow{م}$ = −٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{م}\|$ = ٥

ب $\overrightarrow{ن}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − ١٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ن}\|$ = ١٣

ج ل = −٣ س − ٦ ص ، || ل || = ٣ √٥

د ع = −٧ س ، || ع || = ٧

٦ أ ف = −٦٠ ص

ب و = (٣٠ ، °$\frac{٢\pi}{٣}$) = −١٥ س + ١٥ √٣ ص

توازى متجهين وتعامدهما

ناقش مع طلابك شرط توازى متجهين وشرط تعامدهما كما هو موضح صـ ٦٨، ٦٩ من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

٧ أ = (−٤، ٦) ، ب = (٦، −٩)

∵ −٤ × −٩ − ٦ × ٦ = صفر

∴ أ // ب

∵ ب = (٦، −٩) ، جـ = (٣، ٢)

٦ × ٣ + (−٩ × ٢) = صفر

∴ ب ⊥ جـ

جـ = (٣، ٢) ، أ = (−٤، ٦)

∵ ٣ × −٤ + ٢ × ٦ = صفر

∴ جـ ⊥ أ

تمثيل ضرب متجه فى عدد حقيقى هندسيًا:

أكد على طلابك أنه عند ضرب عدد حقيقى فى متجه غير صفرى فإن الناتج هو متجه يوازى المتجه الأصلى، ويكون فى نفس اتجاهه إذا كان العدد الحقيقى موجبًا وفى عكس اتجاهه إذا كان العدد الحقيقى سالبًا.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٨ أولًا:

أ ٣ م ب −٣ ن ج − م

د ٣ ن هـ −٣ م و ٢ ن

ز −٢ م ح −٢ ن ط −٥ ن

ثانيًا:

أ ب = ٣ م

ب أ = −٣ م

− ب أ = −(−٣ م) = ٣ م

حاول أن تحل

٥ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره:

أ م = (−٣، ٤) ب ن = (٥، −١٢) ج ل = (−٣، −٦) د ع = (−٧، ٠)

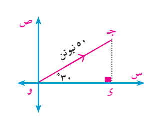
مثال

٥ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من:

أ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٩٠ كم كل ساعة فى اتجاه الشرق.

ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق.

الحل



أ بفرض أن متجه الموضع لسرعة السيارة و ب = (س، ص).

∴ س = ٩٠ ، ص = ٠

ب = ٩٠ س

ب بفرض أن متجه الموضع للقوة المعطاة و جـ = (س، ص)

∴ س = ٥٠ جتا ٣٠° = ٢٥ √٣،

، ص = ٥٠ جا ٣٠° = ٢٥

جـ = ٢٥ √٣ س + ٢٥ ص

حاول أن تحل

٦ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من:

أ ازاحة جسم مسافة ٦٠سم فى اتجاه الجنوب.

ب قوة مقدارها ٣٠ث كجم تؤثر على جسيم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب.

توازى متجهين وتعامدهما Perpendicular and Parallel Vectors

لكل م ، ن متجهين غير صفريين

حيث م = ($س_١$، $ص_١$) ، ن = ($س_٢$، $ص_٢$)

١- إذا كان م // ن

فإن: ظا $\theta_١$ = ظا $\theta_٢$ ، $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

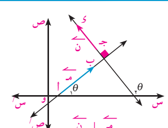
ويكون $س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١$ = صفر والعكس صحيح

٢- إذا كان م ⊥ ن

فإن: ظا $\theta_١$ × ظا $\theta_٢$ = −١

$\frac{ص_١}{س_١} \times \frac{ص_٢}{س_٢}$ = −١

ويكون $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢$ = ٠ والعكس صحيح



لاحظ أن: إذا كان أ = (٢، ٤) ، ب = (−٦، ٣) ، جـ = (٤، ٨)

فإن: أ ⊥ ب لأن: ٢ × −٦ + ٤ × ٣ = −١٢ + ١٢ = صفرًا.

أ // جـ لأن: ٢ × ٨ − ٤ × ٤ = ١٦ − ١٦ = صفرًا.

ب ⊥ جـ لأن: −٦ × ٤ + ٣ × ٨ = −٢٤ + ٢٤ = صفرًا.

مثال

٦ إذا كان أ = (٢، ٥) ، ب = (ك، −٤) فأوجد قيمة ك عندما:

أ أ // ب. ب أ ⊥ ب.

الحل

أ عندما أ // ب فإن شرط التوازى هو: ٢ × −٤ − ٥ × ك = صفرًا

∴ −٨ − ٥ك = صفر ويكون: ك = −$\frac{٨}{٥}$

ب أ ⊥ ب فإن شرط التعامد هو: ٢ × ك + ٥ × −٤ = صفرًا

∴ ٢ك − ٢٠ = صفرًا ويكون: ك = ١٠

حاول أن تحل

٧ إذا كان أ = (−٤، ٦)، ب = (٦، −٩)، جـ = (٣، ٢) أثبت أن: أ // ب ، ب ⊥ جـ ، جـ ⊥ أ

لاحظ أن إذا كان م = (س، ص)، ك ∈ ح

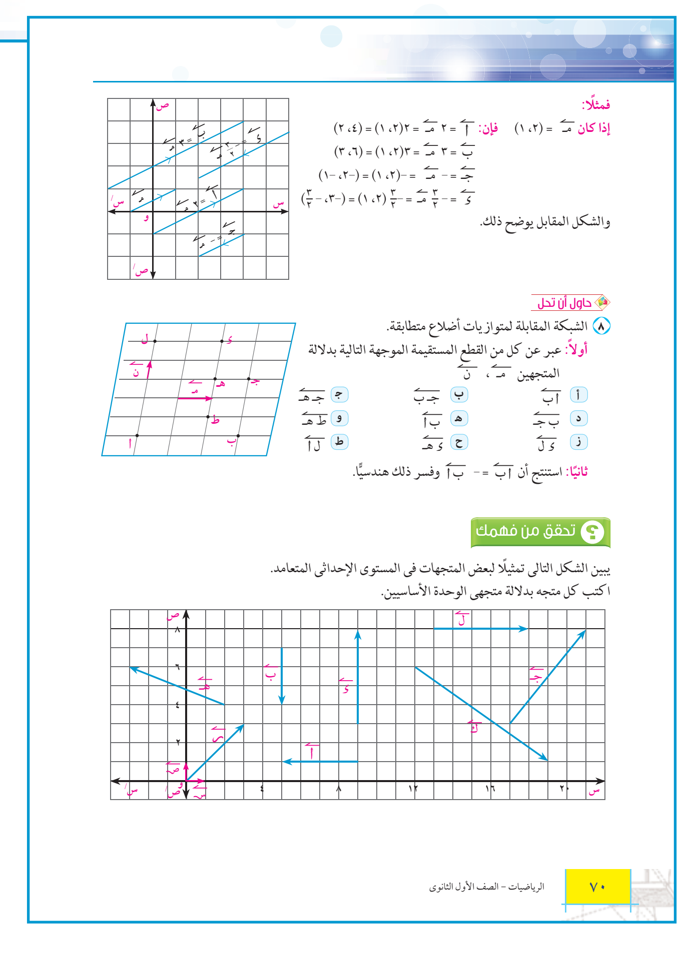
فإن: ك م = ك (س، ص) = (ك س، ك ص)

وإذا كان م متجه غير صفرى، ك ≠ ٠ فإن: م // ك م

ويكون: || ك م || = |ك| · || م ||

حيث اتجاه ك م هو نفس اتجاه م لكل ك > ٠

اتجاه ك م هو عكس اتجاه م لكل ك < ٠


فمثلًا:

إذا كان $\overleftarrow{\text{مـ}}$ = (٢، ١) فإن: $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{مـ}}$ = ٢(٢، ١) = (٤، ٢)

$\overleftarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{مـ}}$ = ٣(٢، ١) = (٦، ٣)

$\overleftarrow{\text{جـ}}$ = − $\overleftarrow{\text{مـ}}$ = −(٢، ١) = (−٢، −١)

$\overleftarrow{\text{ى}}$ = −$\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{\text{مـ}}$ = −$\frac{٣}{٢}$ (٢، ١) = (−٣، −$\frac{٣}{٢}$)

والشكل المقابل يوضح ذلك.

حاول أن تحل

٨ الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

أولاً: عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{\text{مـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$

أ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$	ب $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$	جـ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$
د $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$	هـ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$	و $\overleftarrow{\text{ط هـ}}$
ز $\overleftarrow{\text{ى ل}}$	ح $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$	ط $\overleftarrow{\text{ل أ}}$

ثانيًا: استنتج أن $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = − $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ وفسر ذلك هندسيًّا.

تحقق من فهمك

يبين الشكل التالى تمثيلًا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد.

اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

٧٠ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

أي أنه إذا كانت القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ فإن القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ تمثل المتجهة − $\overleftarrow{\text{ن}}$.

التدريب والتقييم

أولًا: إجابات تحقق من فهمك

$\overleftarrow{\text{أ}}$ = −٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ب}}$ = −٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{جـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ى}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{هـ}}$ = −٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ر}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ك}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

$\overleftarrow{\text{ل}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$

ثانيًا: التقييم

١ إذا كان:

$\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٢، ٥)

$\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (١، −٣)

أوجد كلًّا من:

أ ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ ب $\overleftarrow{\text{أ}}$ − $\overleftarrow{\text{جـ}}$

جـ ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{جـ}}$ د $\overleftarrow{\text{أ}}$ − $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ}}$

٢ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س، ٢)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٣، ص) وكان $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{جـ}}$ حيث: $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٠، ٥) فأوجد قيمتى س، ص.

٣ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من:

أ إزاحة جسم مسافة ١٢سم فى اتجاه يصنع ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ب قوة مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر على جسم فى اتجاه يصنع ٣٠° شمال الغرب.

ثالثًا: التدريب

اطلب إلى طلابك حل تمارين مختارة من كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٢٨، ٢٩.

٣ - ٣

العمليات على المتجهات

Operations on Vectors

خلفية

سبق أن درس الطالب القطعة المستقيمة الموجهة ومتجه الموضع، وضرب متجه فى عدد حقيقى وشرطى توازى وتعامد متجهين وفى هذا الدرس سوف يدرس العمليات على المتجهات ويمثلها هندسيًا.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يجمع المتجهات ويمثل ذلك هندسيًا.
- يستخدم قاعدة المثلث لجمع متجهين فى حل المسائل.
- يستخدم قاعدة متوازى الأضلاع فى حل المسائل.
- يطرح متجهين ويمثل ذلك هندسيًا.
- يعبر عن قطعة مستقيمة موجهة بدلالة متجه الموضع وإحداثيى كل من طرفيها.

مفردات أساسية

جمع متجهين - طرح متجهين - قاعدة المثلث - قاعدة متوازى الأضلاع.

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - طباشير ملون (أقلام ملونة) - أدوات هندسية للرسم والقياس، حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة - المناقشة - الطريقة الاستدلالية - حل مشكلات.

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٧١ إلى صفحة ٧٥

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٣٠ إلى صفحة ٣١

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش» و يهدف إلى استنتاج الطلاب لقاعدة المثلث لجمع متجهين تابع إجابات طلابك مع تصحيح ما يرد من أخطاء فردية فى حينها.

---

٣ - ٣ **العمليات على المتجهات**
Operations on Vectors

أولاً: جمع المتجهات هندسيًا Adding vectors geomitricaly

فكر و ناقش

إذا كانت $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ حيث:

$\overleftarrow{\text{م}}$ = (٤، -٢)، $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (١، ٥)

اكتب ما يساويه $\overleftarrow{\text{م}}$ + $\overleftarrow{\text{ن}}$.

اكتب المتجه الذى تمثله $\overleftarrow{\text{أجـ}}$.

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

قاعدة المثلث لجمع متجهين Triangle Rule of Adding two vectors

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ حيث النقطة ب نقطة النهاية للمتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ و هى نفسها نقطة البداية للمتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$.

فإن: المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ + $\overleftarrow{\text{ن}}$ تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أجـ}}$

أى إن: $\overleftarrow{\text{م}}$ + $\overleftarrow{\text{ن}}$ = $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ أى $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{أجـ}}$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة شال

مثال

(١) تقطع سفينة ٣٠٠ متر شرقًا، ثم ٤٠٠ متر شمالاً للخروج من الميناء.
احسب إزاحة السفينة حتى خروجها من الميناء.

الحل

١- نأخذ مقياس رسم مناسب: باعتبار كل ١ سم تمثل ١٠٠ متر.
∴ ٣سم تمثل ٣٠٠ متر، ٤ سم تمثل ٤٠٠ متر.

٢- ارسم مسار الرحلة بمقياس الرسم مستخدمًا أدواتك الهندسية، فيكون متجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ = $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

سوف تتعلم

- جمع المتجهات والتمثيل الهندسى لها.
- قاعدة المثلث لجمع متجهين.
- قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين.
- طرح المتجهات والتمثيل البيانى لها.
- التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة بدلالة متجهى الموضع لطرفيها.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جمع المتجهات Addition of vectors
- طرح المتجهات Subtraction of vectors
- قاعدة المثلث Triangle Rule
- قاعدة متوازى الأضلاع Parallelogram Rule

الأدوات والوسائل

- أدوات رسم هندسى.
- ورق مربعات للرسم.

كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى ٧١

عرض الدرس

تعلم: قاعدة المثلث لجمع متجهين

استعن بما ورد فى صـ٧١ من كتاب الطالب فى عرض قاعدة المثلث لجمع متجهين مؤكدًا على أن هذه القاعدة تعرف بعلاقة شال ولا تعتمد على اختيار النقطة الابتدائية أ

المثال رقم (١) هو مثال تطبيقى يوضح كيفية استخدام مقياس الرسم فى التمثيل الهندسى للمتجهات واستخدام قاعدة المثلث عمليًّا لجمع المتجهات.

ناقش هذا المثال مع طلابك ثم اطلب إليهم حل السؤال الوارد فى بند «حاول أن تحل» لتأكيد فهمهم لما ورد فى هذا المثال.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(١) مقياس الرسم:

كل اسم يمثل ٤٠ كم

نرسم $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ يمثلها ٢سم، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ يمثلها ٣سم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

أ جـ = ٤,٨

المسافة المقطوعة = ٤,٨ × ٤٠ = ١٩٢ كم

فى اتجاه ٣٩° شمال الغرب.

ناقش مع طلابك ما ورد من ملاحظات صـ٧٢ من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم إجابة ما ورد فى بند "فكر وناقش" فى نفس الصفحة.

التقييم المستمر

إجابة بند فكر

(١) الأيمن = $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}}$

= $(\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + \overleftarrow{\text{جـ أ}}$

= $(\overleftarrow{\text{أ جـ}}) + (-\overleftarrow{\text{أ جـ}}) = \overleftarrow{0}$ = الأيسر

(٢) الأيمن = $(\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + \overleftarrow{\text{جـ ى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}}$

= $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}}$

= $\overleftarrow{\text{أ ى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}} = \overleftarrow{\text{أ هـ}}$ = الأيسر

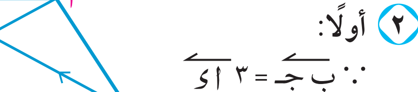
قاعدة متوازى أضلاع لجمع متجهين

- دع طلابك يستنتجوا قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين ثم دعهم يعودوا إلى إجابة ما ورد فى بند «فكر».
- عزز الإجابات الصحيحة موضحًا ذلك على الرسم وصحح ما يرد من أخطاء فردية فى حينها.

المثالين (٢)، (٣) صفحة ٧٣، ٧٤ من كتاب الطالب يعدًا تطبيقان لعملية جمع المتجهات، ناقش طلابك فى حلهما، ثم اطلب إليهم تقديم حلول أخرى لهما.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل



(٢) أولًا:

∵ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٣\ \overleftarrow{\text{أ ى}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} // \overleftrightarrow{\text{أ ى}}$

ب جـ = ٣ أ ى

∴ الشكل أ ب جـ ى شبه منحرف

ثانيًا:

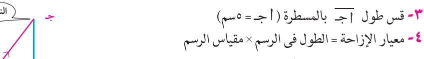
فى △أ جـ ى : $\overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ى}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}}$ (١)

فى △ب جـ ى : $\overleftarrow{\text{ب ى}} = \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ى}}$ (٢)

بجمع (١)، (٢)

$\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب ى}} = \overleftarrow{\text{أ ى}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

$\overleftarrow{\text{أ ى}} + ٣\ \overleftarrow{\text{أ ى}} = ٤\ \overleftarrow{\text{أ ى}}$



٣- قس طول $\overline{\text{أ جـ}}$ بالمسطرة (أ جـ = ٥سم)

٤- معيار الإزاحة = الطول فى الرسم × مقياس الرسم

= ٥ × ١٠٠ = ٥٠٠ متر.

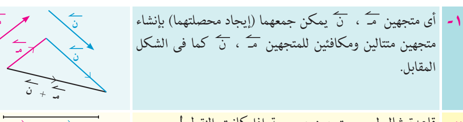
٥- اتجاه الإزاحة : θ = طا$^{-1}$ $(\frac{٤}{٣}) \simeq ٥٣°$ لأقرب درجة.

∴ السفينة تبعد عن نقطة إبحارها مسافة ٥٠٠ متر فى اتجاه ٥٣° شمال الشرق.

حاول أن تحل

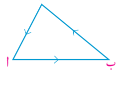
(١) تحركت شاحنة من الموقع أ مسافة ٨٠ كم فى اتجاه الغرب ثم مسافة ١٢٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. إلى أن وصلت إلى الموقع ب. أوجد مقدار واتجاه الإزاحة $\overleftarrow{\text{أب}}$.

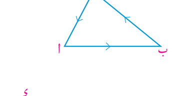
ملاحظات هامة:



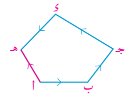
١-	أى متجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتالين ومكافئين للمتجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ كما فى الشكل المقابل.	
٢-	قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط أ، ب، جـ تنتمى إلى مستقيم واحد. ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}}$	
٣-	$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب أ}} = \overleftarrow{\text{أ أ}} = \overleftarrow{0}$ (العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات) ∴ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ هو المعكوس الجمعى للمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ أى إن $\overleftarrow{\text{ب أ}} = -\overleftarrow{\text{أب}}$	

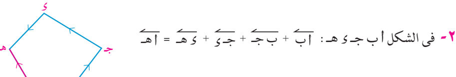
فكر: استنتج صحة العبارات التالية:





١- فى △أ ب جـ: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}} = \overleftarrow{0}$

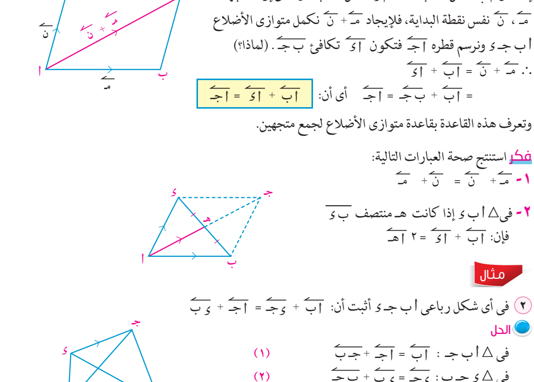




٢- فى الشكل أ ب جـ ى هـ: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}} = \overleftarrow{\text{أ هـ}}$

٧٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

العمليات على المتجهات



قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين Parallelorgram Rule of Adding two vectors

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ ، أى إن للمتجهات $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ نفس نقطة البداية، فلإيجاد $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}}$ نكمل متوازى الأضلاع أ ب جـ ى ونرسم قطره $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ فتكون $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$. (لماذا؟)

∴ $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أ ى}}$

= $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ أى أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أ ى}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}}$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين.

فكر استنتج صحة العبارات التالية:

١- $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{ن}} + \overleftarrow{\text{م}}$

٢- فى△ أ ب ى إذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أ ى}} = ٢\ \overleftarrow{\text{أ هـ}}$

مثال

(٢) فى أى شكل رباعى أ ب جـ ى أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ى ب}}$

الحل

فى △ أ ب جـ : $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}}$ (١)

فى △ ى جـ ب: $\overleftarrow{\text{ى جـ}} = \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

= $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ (خاصية الإبدال).

= $(\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ى ب}}) + (\overleftarrow{\text{جـ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}})$ (خاصية الدمج).

= $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ى ب}} + \overleftarrow{0}$ (المعكوس الجمعى).

= $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ى ب}}$ (خاصية المحايد الجمعى).

حاول أن تحل

(٢) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٣\ \overleftarrow{\text{أ ى}}$ أثبت أن :

أ) أ ب جـ ى شبه منحرف.

ب) $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب ى}} = ٤\ \overleftarrow{\text{أ ى}}$.

مثال

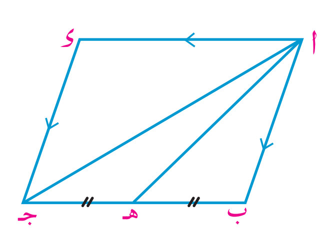
(٣) أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م. ن نقطة فى نفس المستوى. أثبت أن:

أ) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أ ى}} + ٢\ \overleftarrow{\text{جـ م}} = \overleftarrow{0}$

ب) $\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = \overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}}$

٧٣ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى





في $\triangle$ أ ى جـ : $\overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}}$

$\because$ ب هـ = هـ جـ

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٢ \overleftarrow{\text{أهـ}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى هـ}} = ٢ \overleftarrow{\text{أهـ}}$

تجنب الخطأ:

- قد يخطئ بعض الطلاب في تطبيق قاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين نتيجة لوضع اتجاه الأسهم التي تعبر عن المتجهات بطريقة خطأ.
- اطلب إلى الطالب رسم صورة تعبر عن المسألة والتأكد من صحة اتجاهات الأسهم قبل تطبيق القاعدة.

طرح المتجهات والتمثيل الهندسي لها

لاحظ أن عملية طرح متجهين هي نفسها عملية إضافة المعكوس الجمعي للمتجه.

ناقش مع طلابك ما ورد في صـ٧٢ مؤكدًا على ذلك.

وضح لطلابك أنه يمكن استخدام طرح المتجهات في التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة بدلالة متجهي الموضع لطرفيها.

استعن بما ورد في صفحة ٧٤، ٧٥ من كتاب الطالب لتوضيح ذلك.

التقويم المستمر

إجابات حاول أن تحل

٤ أ $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (٩، ٠) - (١، -٢) = (٨، ٢)$

$\overleftarrow{\text{ى جـ}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{ى}} = (٨، ٤) - (٠، ٢) = (٨، ٢)$

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ،ويكون $\overleftarrow{\text{أب}} \parallel \overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ،أب = ى جـ

ب $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{ب}} =$

الحل

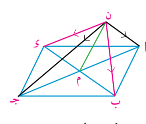
أ $\because \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$ (١) قاعدة متوازي الأضلاع.

$٢ \overleftarrow{\text{جـ م}} = \overleftarrow{\text{جـ أ}}$ (٢) (جـ م = م أ).

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + ٢ \overleftarrow{\text{جـ م}} = \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}}$

$\because \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}} = \overleftarrow{\text{٠}}$ $\therefore \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + ٢ \overleftarrow{\text{جـ م}} = \overleftarrow{\text{٠}}$



ب ارسم $\overline{\text{ن م}}$

في $\triangle$ ن أ جـ: $\because$ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ $\therefore \overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = ٢ \overleftarrow{\text{ن م}}$ (٣).

في $\triangle$ ن ب ى: $\because$ م منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ $\therefore \overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}} = ٢ \overleftarrow{\text{ن م}}$ (٤).

من (٣) ، (٤) ينتج أن: $\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن جـ}} = \overleftarrow{\text{ن ب}} + \overleftarrow{\text{ن ى}}$.

حاول أن تحل

٣ أ ب جـ ى متوازي أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ى جـ}} = ٢ \overleftarrow{\text{أهـ}}$

ثانيًا: طرح المتجهات هندسيًا Subtracting Vectors geometricaly

في $\triangle$ أ ب جـ بالشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + (-\overleftarrow{\text{أجـ}})$ (تعريف الطرح).

$= \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}}$ (المعكوس الجمعي).

$= \overleftarrow{\text{جـ أ}} + \overleftarrow{\text{أب}}$ (الإبدال).

$= \overleftarrow{\text{جـ ب}}$ (قاعدة المثلث).

أي إن $\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{جـ ب}}$

فإذا كانت $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$

فإن: $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تمثل $\overleftarrow{\text{م}} - \overleftarrow{\text{ن}}$ كما أن $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ تمثل $\overleftarrow{\text{ن}} - \overleftarrow{\text{م}}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهي الموضع لطرفيها:

إذا كانت أ $(س_١، ص_١)$ ، ب $(س_٢، ص_٢)$.

فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{و ب}} - \overleftarrow{\text{و أ}}$ (من قاعدة الطرح).

حيث $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ متجهي موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

$\therefore \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$

فمثلاً: إذا كانت أ (٧، −١) ، ب (٢، ٥) فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (٢، ٥) - (٧، -١) = (-٥، ٦)$

٧٤ الرياضيات - الصف الأول الثانوي

$= (٨، ٤) - (٩، ٠) = (-١، ٤)$

$\because \overleftarrow{\text{أب}} = (٨، ٢)$ $\therefore ٨ \times -١ + ٢ \times ٤ =$ صفر

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = (-١، ٤)$ $\therefore \overleftarrow{\text{أب}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

ثانيًا: $\because \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ى جـ}}$

$\therefore \overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ى جـ}}$ ، أب = ى جـ

$\therefore$ الشكل أ ب جـ ى متوازي أضلاع

$\because \overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ويكون أ ب جـ ى مستطيل

$\|\overleftarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{(٨)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٦٨} = ٢\sqrt{١٧}$

$\|\overleftarrow{\text{ب جـ}}\| = \sqrt{١^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٧}$

$\therefore$ محيط المستطيل أ ب جـ ى =

$(٢\sqrt{١٧} + \sqrt{١٧}) \times ٢ = ٦\sqrt{١٧}$ وحدة طول

مساحة المستطيل أ ب جـ ى =

$٢\sqrt{١٧} \times \sqrt{١٧} = ٣٤$ وحدة مساحة

مثال

٤ أ ب جـ ى متوازى أضلاع حيث أ (٢، −١) ، ب (٧، ١) ، جـ (٤، ٤) أوجد إحداثيى نقطة ى.

الحل

∵ $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ى = ب جـ ∴ $\overrightarrow{\text{أى}}$ = $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

ويكون $\overrightarrow{\text{ى}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∴ ى = $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$

أى إن $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٢، −١) + (٤، ٤) − (٧، ١) = (−١، ٢) ∴ إحداثيا نقطة ى هما (−١، ٢)

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ (−١، −٢)، ب (٩، ٠)، جـ (٨، ٤)، ى (٠، ٢).

أثبت أن: (أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$. (ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

مثال

٥ إذا كان: ٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ أثبت أن $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

الحل

٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ (إضافة ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ للطرفين).

٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (المعكوس الجمعى للمتجهات).

٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (عملية الطرح).

٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ ($\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$) = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

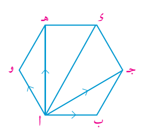
حاول أن تحل

٥ إذا كان: ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ أثبت أن $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$.

تحقق من فهمك

فى الشكل المقابل: أ ب جـ ى سداسى منتظم، أثبت أن:

$\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أو}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أى}}$.



٥ ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

= ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

= ٢ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ (قاعدة المثلث)

∴ $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$

التدريب والتقييم

أولًا: إجابات تحقق من فهمك

فى △ أ ى هـ = $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ + $\overrightarrow{\text{هـ ى}}$ = $\overrightarrow{\text{أى}}$

∵ $\overrightarrow{\text{هـ ى}}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أى}}$ (١)

فى △ أ جـ ى : $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ = $\overrightarrow{\text{أى}}$

∵ $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ = $\overrightarrow{\text{أو}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أو}}$ = $\overrightarrow{\text{أى}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن

$\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أو}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أى}}$

ثانيًا: التقييم

١ إذا كان أ ب جـ ى متوازى أضلاع،

$\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أى}}$ = (ل − م) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (ل + م) $\overrightarrow{\text{ص}}$

أوجد ل، م.

٢ أ ب جـ مثلث، ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أثبت أن:

أولًا: $\overrightarrow{\text{أو}}$ + $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أى}}$

ثانيًا: $\overrightarrow{\text{أو}}$ − $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$

ثالثًا: $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ + $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{هـ و}}$

ثالثًا: التدريب

اطلب إلى طلابك حل تمارين مختارة من كراسة الأنشطة والتدريبات من صفحة ٣٠، ٣١ وتابع حلولهم.

٣ - ٤

تطبيقات على المتجهات

Application on Vectors

خلفية

سبق أن درس الطالب المفاهيم الأساسية للمتجهات والعمليات عليها – والآن سوف يدرس بعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية للمتجهات.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم المتجهات والعمليات عليها فى إثبات صحة بعض النظريات الهندسية.
- يحل تطبيقات هندسية باستخدام المتجهات.
- يقوم أنشطة تشمل تطبيقات فيزيائية تشمل محصلة عدة قوى – اتزان القوى – السرعة النسبية.

مفردات أساسية

قوة محصلة – توازن القوى – سرعة نسبية

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية – طباشير ملون (أقلام ملونة) – أدوات هندسية للرسم والقياس، حاسب آلى – برامج رسومية – جهاز عرض بيانات.

طرق التدريس المقترحة

الطريقة الاستدلالية – حل المشكلات – المناقشة.

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ٧٦ إلى صفحة ٨١

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٣٢ إلى صفحة ٣٤

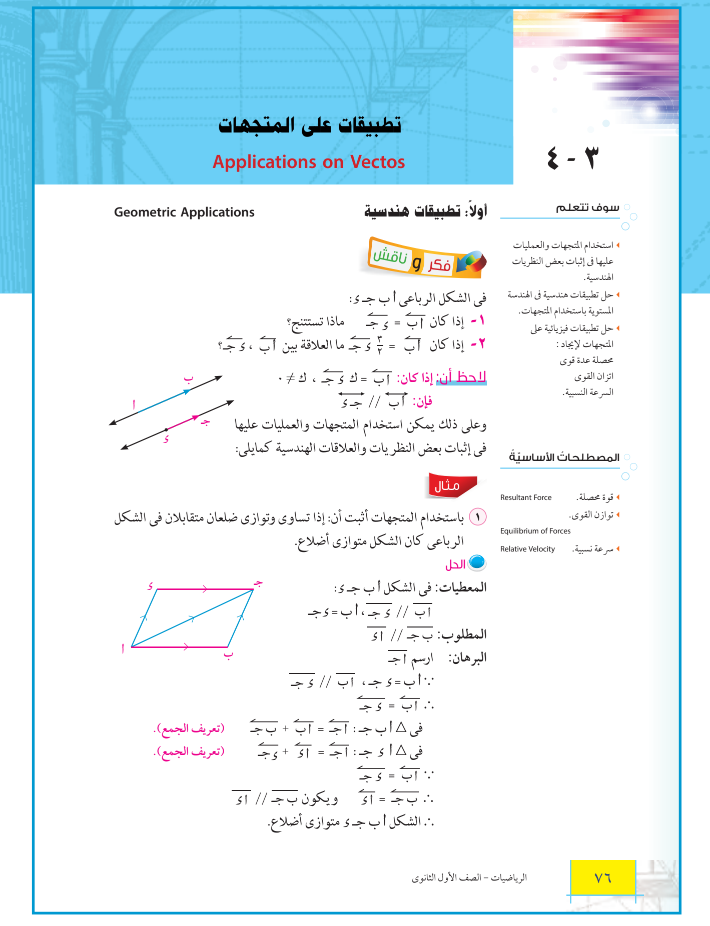
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

ناقش مع طلابك التساؤلات المطروحة فى بند «فكر وناقش» صـ٧٦ ثم أكد على أنه يمكن استخدام المتجهات والعمليات عليها فى إثبات صحة بعض النظريات والعلاقات الهندسية التى سبق لهم دراستها.



٣ - ٤

تطبيقات على المتجهات

Applications on Vectos

سوف تتعلم

- استخدام المتجهات والعمليات عليها فى إثبات بعض النظريات الهندسية.
- حل تطبيقات هندسية فى الهندسة المستوية باستخدام المتجهات.
- حل تطبيقات فيزيائية على المتجهات لإيجاد: محصلة عدة قوى، اتزان القوى، السرعة النسبية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قوة محصلة. Resultant Force
- توازن القوى. Equilibrium of Forces
- سرعة نسبية. Relative Velocity

أولاً: تطبيقات هندسية Geometric Applications

فكر و ناقش

فى الشكل الرباعى أ ب جـ ى:

١- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$ ماذا تستنتج؟

٢- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{\text{ى جـ}}$ ما العلاقة بين $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$؟

لاحظ أن: إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ ب}} = $ ك $\overrightarrow{\text{ى جـ}}$ ، ك $\neq 0$

فإن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$

وعلى ذلك يمكن استخدام المتجهات والعمليات عليها فى إثبات بعض النظريات والعلاقات الهندسية كمايلى:

مثال

(١) باستخدام المتجهات أثبت أن: إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى الشكل الرباعى كان الشكل متوازى أضلاع.

الحل

المعطيات: فى الشكل أ ب جـ ى:

$\overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{ى جـ}}$ ، أ ب = ى جـ

المطلوب: $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{أ ى}}$

البرهان: ارسم $\overline{\text{أ جـ}}$

∵ أ ب = ى جـ ، $\overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{ى جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$

فى △ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ (تعريف الجمع).

فى △ أ ى جـ : $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ى}} + \overrightarrow{\text{ى جـ}}$ (تعريف الجمع).

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ى}}$ ويكون $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{أ ى}}$

∴ الشكل أ ب جـ ى متوازى أضلاع.

٧٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

اسأل:

- ما النظريات الهندسية التى سبق لك دراستها والمتعلقة بالمثلث؟ وما النظريات الهندسية التى سبق لك دراستها والمتعلقة بالأشكال الرباعية؟
- من وجهة نظرك .. أى النظريات فى البند السابق يمكنك إثبات صحتها باستخدام المتجهات؟ ولماذا؟
- ناقش إجابات الطلاب واقبل الإجابات الصحيحة.

تعلم:

أولًا التطبيقات الهندسية

ناقش مع طلابك كيفية برهنة صحة النظريات المتضمنة فى صفحتى ٧٦، ٧٧ من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم تقديم براهين أخرى لهذه النظريات باستخدام المتجهات.

مثال

② باستخدام المتجهات أثبت أن: القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث.

الحل

المعطيات: فى △ أ ب جـ : ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

المطلوب: $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان: ∵ ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ ى $= \frac{1}{2}$ أ ب ، $\overrightarrow{\text{أ ى}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ ب}}$

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ أ هـ $= \frac{1}{2}$ أ جـ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

فى △ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (تعريف الجمع). (١)

فى △ أ ى هـ : $\overrightarrow{\text{ى هـ}} = \overrightarrow{\text{ى أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}}$ (تعريف الجمع).

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}})$. (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\overrightarrow{\text{ى هـ}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ وهو المطلوب

لاحظ أن $\| \overrightarrow{\text{ى هـ}} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{\text{ب جـ}} \|$ فيكون طول $\overline{\text{ى هـ}} = \frac{1}{2}$ طول $\overline{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل

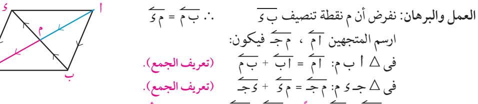
① أ ب جـ ى شكل رباعى. س ص ع ل منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{ى أ}}$ على الترتيب.
باستخدام المتجهات أثبت أن:

(أ) الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع. (ب) محيط الشكل أ ب جـ ى يساوى مجموع طولى قطريه.

مثال

③ باستخدام المتجهات أثبت أن: قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

الحل



العمل والبرهان: نفرض أن م نقطة تنصيف $\overline{\text{ب ى}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{م ى}}$

ارسم المتجهين $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ فيكون:

فى △ أ ب م: $\overrightarrow{\text{أ م}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب م}}$ (تعريف الجمع).

فى △ جـ ى م: $\overrightarrow{\text{م جـ}} = \overrightarrow{\text{م ى}} + \overrightarrow{\text{ى جـ}}$ (تعريف الجمع).

∵ $\overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{م ى}}$ عملاً ، $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$ (من متوازى الأضلاع).

∴ $\overrightarrow{\text{أ م}} = \overrightarrow{\text{م جـ}}$

وحيث إن $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ لهما نفس الاتجاه وتشتركان فى نقطة م.

∴ كل منهما يقع على نفس المستقيم، أى أن أ ، م ، جـ على استقامة واحدة

∵ $\| \overrightarrow{\text{أ م}} \| = \| \overrightarrow{\text{م جـ}} \|$ ∴ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{ب ى}}$ عملاً.

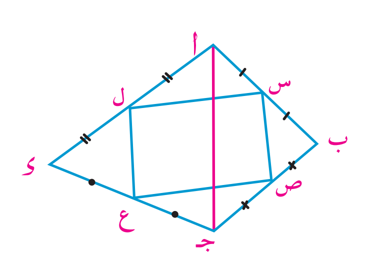
∴ القطران $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ى}}$ ينصف كل منهما الآخر (وهو المطلوب).

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:



①



ارسم $\overline{\text{أ جـ}}$

فى △ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\overrightarrow{\text{س ص}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}})$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (١)

بالمثل فى △ أ ى جـ : $\overrightarrow{\text{ل ع}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) $\overrightarrow{\text{س ص}} = \overrightarrow{\text{ل ع}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ ، س ص $= \frac{1}{2}$ أ جـ (٣)

بالمثل يكون $\overrightarrow{\text{س ل}} = \overrightarrow{\text{ص ع}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{ب ى}}$

$\overleftrightarrow{\text{س ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ ، ص ع $= \frac{1}{2}$ ب ى (٤)

من (٣)، (٤)

الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع (المطلوب أولًا)

محيط متوازى الأضلاع س ص ع ل

= ٢(س ص + ص ع)

$= ٢ (\frac{1}{2}$ أ جـ $+ \frac{1}{2}$ ب ى$)$

= أ جـ + ب ى (المطلوب ثانيًا)

② (أ) $\overrightarrow{\text{أ ى}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أ ى}}$

∵ $\overline{\text{أ ى}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أ ى}} = ٢ \overrightarrow{\text{مـ}}$

$\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ن}} + ٢ \overrightarrow{\text{مـ}}$

$\overrightarrow{\text{ى جـ}} = \overrightarrow{\text{ى أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$= - \overrightarrow{\text{مـ}} + \overrightarrow{\text{ن}} + ٢ \overrightarrow{\text{مـ}}$

$= \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{مـ}}$

$\overrightarrow{\text{ى ب}} = \overrightarrow{\text{ى أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} = - \overrightarrow{\text{مـ}} + \overrightarrow{\text{ن}}$

$= \overrightarrow{\text{ن}} - \overrightarrow{\text{مـ}}$

③ لإثبات أن الشكل أ ب جـ ى معين يجب إثبات أنه متوازى أضلاع قطراه متعامدان وذلك باستخدام المتجهات كالآتى:

أولًا: أثبت أن $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ى جـ}}$

ثانيًا: أثبت أن $\overrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overrightarrow{\text{ب ى}}$

التدريب والتقييم

أولًا: إجابات تحقق من فهمك

∵ أ ب جـ ء مربع

∴ أب // جـء ويساويه   أى أن أب = جـء

بفرض أن ء(س، ص)   ∴ أب = ب − أ

= (٨، ٢) − (٣، −١)

= (٥، ٣)   (١)

جـء = (س، ص) − (٠، ٤)

= (س، ص − ٤)   (٢)

من (١)، (٢) ∴ س = ٥ ، ص = ٧

∴ إحداثيى ء (٥، ٧)

مساحة المربع = (ب أ)^٢ = || أب ||^٢

= ٢٥ + ٩ = ٣٤ وحدة مربعة.

ثانيًا التقييم

إذا كان ل = (٧، −٢)، م = (أ، ٣) ن = (−٤، ب)

أوجد قيمتى أ، ب إذا كان:

أ) ل + م + ن = ٠

ب) ل + م + ن − ٥ ص

ثالثًا التدريب

اطلب إلى طلابك حل تمارين مختارة من كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحات ٣٢، ٣٣، ٣٤ وتابع حلولهم.

تطبيقات فيزيائية

نشاط (١) القوة المحصلة

وضح لطلابك أن هناك العديد من التطبيقات الفيزيائية التى يمكن استخدام المتجهات فى حلها، مثل إيجاد القوة المحصلة على الجسم، توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة واحدة والمؤثرة على جسم متماسك، السرعة النسبية وهكذا ....

- اطلب إلى طلابك الاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) أو مكتبة المدرسة فى كتابة تطبيقات فيزيائية أخرى خلاف التى تم عرضها فى كتاب الطالب وكتابة تقرير عن كل منها.
- ناقش مع طلابك ما ورد من أمثلة فى الصفحات من ٧٦ إلى ٧٩ والإجابه عن كل الأسئلة المطروحة.

حاول أن تحل

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء شبه منحرف، أء // ب جـ، أء = ½ ب جـ، أب = ن

أ) عبر بدلالة م، ن عن كل من: ب جـ، أ جـ، ء جـ، ء ب

ب) إذا كانت س ∈ أ جـ حيث أ س = ⅓ أ جـ، أثبت أن النقط ء، س، ب تقع على استقامة واحدة.

مثال

(٤) باستخدام المتجهات أثبت أن النقط أ (١، ٤)، ب(−١، −٢)، جـ(٢، −٣) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب.

الحل

فى المثلث أ ب جـ:

أب = ب − أ = (−١، −٢) − (١، ٤) = (−٢، −٦) ، جـب = ب − جـ = (−١، −٢) − (٢، −٣) = (−٣، ١)

∵ (−٢) × (−٣) + (−٦) × ١ = صفر ∴ أب ⊥ جـب ، ق(∠ب) = ٩٠°

∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

حاول أن تحل

(٣) باستخدام المتجهات أثبت أن النقط أ (٣، ٤)، ب(١، −١)، جـ(−٤، −٣)، ء(٢، ٢) هى رؤوس معين

تحقق من فهمك

أ ب جـ ء مربع، إذا كانت أ (٨، ٢)، ب(٣، −١)، جـ(٠، ٤) فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيى نقطة ء ومساحة سطح المربع.

ثانيًا: تطبيقات فيزيائية   Physical Applications

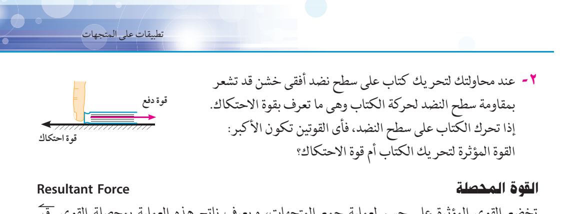
نشاط (١)

١- إذا أثرت قوة مقدارها ٦ نيوتن باتجاه الشرق على مكعب خشبى واخترنا أن تمثل كل ٣ نيوتن على الرسم بقطعة مستقيمة موجهة طولها سنتيمترًا واحدًا، ما طول المتجه الذى يمثل هذه القوة؟ إذا أثرت قوة إضافية مقدارها ٣ نيوتن باتجاه الشرق على المكعب. ما مقدار القوة المؤثرة على الجسم عندئذ؟

وما طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل هذه القوة على الرسم؟

ق١ = ٦ نيوتن
ق١ = ٦ نيوتن
ق٢ = ٣ نيوتن
ق = ... نيوتن

٧٨   الرياضيات – الصف الأول الثانوى



تطبيقات على المتجهات

٢- عند محاولتك لتحريك كتاب على سطح نضد أفقى خشن قد تشعر بمقاومة سطح النضد لحركة الكتاب وهى ما تعرف بقوة الاحتكاك. إذا تحرك الكتاب على سطح النضد، فأى القوتين تكون الأكبر: القوة المؤثرة لتحريك الكتاب أم قوة الاحتكاك؟

قوة دفع
قوة احتكاك

القوة المحصلة   Resultant Force

تخضع القوى المؤثرة على جسم لعملية جمع المتجهات، ويعرف ناتج هذه العملية بمحصلة القوى ق (أو القوة المحصلة) المؤثرة على الجسم حيث ق = ق١ + ق٢ + ...

وعلى ذلك: لإيجاد محصلة القوى المؤثرة على المكعب الخشبى:

(١) اعتبر ى متجه وحدة فى اتجاه الشرق.

فيكون ق = ق١ + ق٢ = ٦ ى + ٣ ى = ٩ ى

أى إن: ق = ٩ نيوتن، وتعمل فى اتجاه الشرق.

ى   ق١ = ٦ ى   ق٢ = ٣ ى

(٢) لإيجاد محصلة القوى المؤثرة على الكتاب عند محاولة تحريكه بقوة ق١ مقدارها ٥ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك ٣ نيوتن اعتبر ى متجه وحدة فى اتجاه حركة الكتاب.

∴ قوة الدفع: ق١ = ٥ ى

قوة الاحتكاك: ك = −٣ ى

ويكون ق = ق١ + ك = ٥ ى − ٣ ى = ٢ ى

أى إن: ق = ٢ نيوتن، وتعمل فى اتجاه حركة الكتاب.

ى   ق١ = ٥ ى   ك = −٣ ى

أضف إلى معلوماتك

وحدات القوة
داين – نيوتن
ثقل الجرام (ث جم)
ثقل الكيلو جرام (ث كجم).

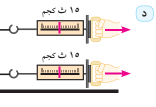
حاول أن تحل

(٤) أوجد محصلة القوى المؤثرة ق فى كل ممايأتى:

أ) ٤٠ ث كجم   ٣٠ ث كجم

ب) ٧٠ نيوتن   ٧٠ نيوتن

جـ) ٥٠ ث كجم   ١٠٠ ث كجم



د) ١٥ ث كجم   ١٥ ث كجم   ٣٠ ث كجم

٧٩   كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(٤) أ $\overleftarrow{و} = ٤٠\,\overleftarrow{ى} - ٣٠\,\overleftarrow{ى} = ١٠\,\overleftarrow{ى}$

و = ١٠ ث كجم فى اتجاه حركة السيارة

ب $\overleftarrow{و} = ٧٠\,\overleftarrow{ى} - ٧٠\,\overleftarrow{ى} = \overleftarrow{٠}$

ج $\overleftarrow{و} = ١٥\,\overleftarrow{ى} + ٢٠\,\overleftarrow{ى} - ٣\,\overleftarrow{ى} = ٣٢\,\overleftarrow{ى}$

و = ٣٢ ث كجم فى اتجاه قوة الشد

د $\overleftarrow{و} = ١٠٠\,\overleftarrow{ى} - ٥٠\,\overleftarrow{ى} = ٥٠\,\overleftarrow{ى}$

و = ٥٠ ث كجم رأسيًّا لأسفل

(٥) $\overleftarrow{و} = (٢ + أ + ٥)\,\overleftarrow{س} + (٣ + ١ + ب)\,\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{و} = (٧ + أ)\,\overleftarrow{س} + (٤ - ب)\,\overleftarrow{ص}$

أ عندما $\overleftarrow{و} = ٥\,\overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$ فإن:

$٧ + أ = ٥ \leftarrow أ = -٢$ $٤ + ب = -٢ \leftarrow ب = -٦$

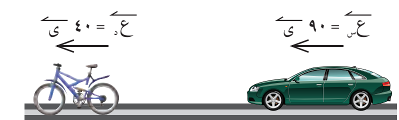
ب عندما $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{٠}$ فإن:

$٧ + أ = ٠ \leftarrow أ = -٧$ $٤ + ب = ٠ \leftarrow ب = -٤$

نشاط (٢) السرعة النسبية

(٦) باعتبار $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى نفس اتجاه حركة الدراجة.

أولًا: السيارة والدراجة تتحركان فى اتجاه واحد

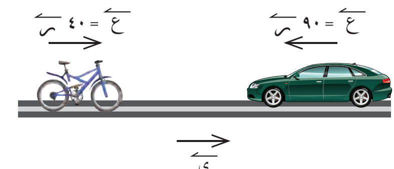


$\overleftarrow{ع}_{س} = ٩٠\,\overleftarrow{ى}$ $\overleftarrow{ع}_{د} = ٤٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{سد} = \overleftarrow{ع}_{س} - \overleftarrow{ع}_{د} = ٩٠\,\overleftarrow{ى} - ٤٠\,\overleftarrow{ى} = ٥٠\,\overleftarrow{ى}$

أى أن راكب الدراجة يشعر أن السيارة تتحرك نحوه بسرعة ٥٠ كم/س

ثانيًا: السيارة والدراجة تتحركان فى اتجاهين متضادين



$\overleftarrow{ع}_{س} = ٩٠\,\overleftarrow{ى}$ $\overleftarrow{ع}_{د} = ٤٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{سد} = \overleftarrow{ع}_{س} - \overleftarrow{ع}_{د} = -١٣٠\,\overleftarrow{ى}$

أى أن راكب الدراجة يشعر أن السيارة يتحرك بسرعة ١٣٠ كم/س

٣- إذا أثرت القوى: $\overleftarrow{ق}_1 = ٢\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_2 = \overleftarrow{س} + ٧\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_3 = \overleftarrow{س} - ٥\,\overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية.

احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسه بالنيوتن).

الحل

∵ محصلة القوى $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2 + \overleftarrow{ق}_3$

∴ $\overleftarrow{ق} = (٢ + ١ + ١)\,\overleftarrow{س} + (١ + ٧ - ٥)\,\overleftarrow{ص}$

$= ٤\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص}$

مقدار المحصلة $= \|\overleftarrow{ق}\| = \sqrt{(٤)^2 + (٣)^2} = ٥$ نيوتن

اتجاه المحصلة: $\theta = طا^{-1}\left(\frac{٣}{٤}\right) \simeq ٣٧^\circ$.

حاول أن تحل

(٥) القوى: $\overleftarrow{ق}_1 = ٢\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_2 = أ\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_3 = ٥\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية.

أوجد قيمتى أ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى $\overleftarrow{ق}$:

أ $\overleftarrow{ق} = ٥\,\overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$.

ب $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{٠}$.

فكر: ما معنى أن محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overleftarrow{٠}$

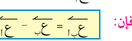
نشاط (٢)

السرعة النسبية Relative Velocity

أثناء جلوسك فى سيارة متحركة (أ) ولاحظت سرعة سيارة أخرى (ب) تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة (أ) فإنك تشعر أن سرعة السيارة (ب) أقل من سرعتها الأصلية. أما إذا تحركت السيارة (ب) فى عكس اتجاه حركة السيارة (أ) فإنك تشعر أن سرعة السيارة (ب) أكبر من سرعتها الأصلية.

لاحظ أن: السرعة النسبية لجسم (ب) بالنسبة إلى جسم آخر (أ) ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{ع}_{ب أ}$، هى السرعة التى يبدو الجسم (ب) متحركًا بها إذا اعتبر الجسم (أ) فى حالة سكون.

فإذا كان: $\overleftarrow{ع}_{أ}$ سرعة السيارة أ الفعلية، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ سرعة السيارة ب الفعلية.



فإن: $\overleftarrow{ع}_{ب أ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}$

فكر ماذ تعنى $\overleftarrow{ع}_{أ ب}$ ؟



٨٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

تطبيقات على المتجهات

مثال

(٥) تتحرك سيارة (أ) على طريقة مستقيم بسرعة ٧٠ كم /س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٩٠ كم/س. أوجد سرعة السيارة (أ) بالنسبة إلى السيارة (ب) عندما:

أ تتحرك السيارتان فى اتجاه واحد.

ب تتحرك السيارتان فى اتجاهين متضادين.

الحل

باعتبار $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى نفس اتجاه سرعة السيارة أ

أ السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد:

$\overleftarrow{ع}_{أ} = ٧٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{ب} = ٩٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{أ ب} = \overleftarrow{ع}_{أ} - \overleftarrow{ع}_{ب}$

$= ٧٠\,\overleftarrow{ى} - ٩٠\,\overleftarrow{ى} = ٢٠\,\overleftarrow{ى}$

أى إن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة أ تتحرك نحوه بسرعة ٢٠ كم/س.

ب السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين:

$\overleftarrow{ع}_{أ} = ٧٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{ب} = -٩٠\,\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ع}_{أ ب} = \overleftarrow{ع}_{أ} - \overleftarrow{ع}_{ب}$

$= ٧٠\,\overleftarrow{ى} - (-٩٠\,\overleftarrow{ى}) = ١٦٠\,\overleftarrow{ى}$

أى إن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة أ تتحرك نحوه بسرعة ١٦٠ كم/س.

حاول أن تحل

(٦) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س. إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم/س على نفس الطريق. فأوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما يتحركان فى نفس الاتجاه.

٨١ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد إحداثيى نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيات نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة والمعادلات البارامترية، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

المصطلحات الأساسية

نقطة تقسيم	point of division
متجه اتجاه مستقيم	direction vector of Straight line direction
معادلة متجهة	Vector equation
معادلة بارامترية	parametric Equation
معادلة كارتيزية	Cartesian Equation
معادلة عامة	General Equation
زاوية بين مستقيمين	Angle between two straight lines
طول عمود	Length of perpendicular

الوحدة الرابعة

الخط المستقيم

Straight Line

مقدمة الوحدة

سبق للطالب أن درس معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة معلومة تقع عليه فى الصورة الإحداثية، وسبق أن درس المتجهات فى الوحدة الثالثة، وسوف يدرس فى هذه الوحدة الصور المختلفة لمعادلات الخط المستقيم فى الصورة المتجهة والصورة البارامترية والصورة الكارتيزية وذلك من خلال خمسة دروس كالآتى:

الدرس الأول: تقسيم قطعة مستقيمة.

الدرس الثانى: معادلة الخط المستقيم.

الدرس الثالث: قياس الزاوية بين مستقيمين.

الدرس الرابع: طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.

الدرس الخامس: المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقمين.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم نهايتا القطعة المستقيمة.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة والمعادلات البارامترية، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من



دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): تقسيم قطعة مستقيمة.

الدرس (٤ - ٢): معادلة الخط المستقيم.

الدرس (٤ - ٣): قياس الزاوية بين مستقيمين.

الدرس (٤ - ٤): طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.

الدرس (٤ - ٥): المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

الأدوات المستخدمة

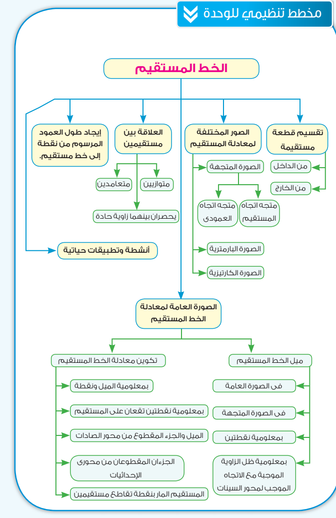
آلة حاسبة علمية - حاسب آلي - برامج رسم بياني.

نبذة تاريخية

تعد الهندسة التحليلية أحد الفروع الأساسية للرياضيات لما لها من أهمية بالغة عند دراسة معظم العلوم الرياضية والتطبيقات الفيزيائية والعلوم التقنية، ولقد ساعدت على دراسة الفضاء وخواصه الهندسية في العصر الحديث، وترتبط بكل ما هو جديد، حيث إنها تُعتبر الأساس فى تفسير الصور فى علم الكمبيوتر.

وتعتبر الهندسة التحليلية مدخلًا لدراسة الهندسة التفاضلية (هندسة الحركة) والهندسة الجبرية، حيث إن الهندسة التفاضلية تختص بدراسة الأشكال الهندسية وخاصة المنحنيات والسطوح من حيث خواصها الهندسية، وذلك بتطبيق حساب التفاضل والتكامل، وقد ابتكر العلماء النظام الإحداثى المكون من محورين متعامدين ومتقاطعين (محور السينات ومحور الصادات) والذى بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة فى المستوى بعددين حقيقيين (س، ص) وباستخدام النظام الإحداثى امكن اثبات صحة خواص الهندسة الإقليدية معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقط عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين (س، ص)، ولقد يسرت الهندسة التحليلية الكثير من المعالجات فى فروع الرياضيات المختلفة، كما كانت من عوامل تطورها والتعامل بينها.

مخطط تنظيمي للوحدة



محورى الإحداثيات.

- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

زمن تدريس الوحدة

١٢ ساعة

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الناقد - حل المشكلات - التفكير المنطقى.

الوسائل التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية - ورق مربعات- حاسب آلي - برامج رسومية - ورق مربعات.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة - المناقشة - الطريقة الاستدلالية - العصف الذهنى - حل المشكلات.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الحصة -والأسئلة الواردة "حاول أن تحل" كتطبيق لكل مثال والأسئلة الواردة"تحقق من فهمك "فى نهاية كل درس والتمارين العامة فى نهاية كل وحدة اختبار الوحدة والاختبار تراكمى.

٤ - ١

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing line segment

خلفية

سبق للطالب أن درس تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل وأوجد إحداثيى نسبة التقسيم، وفى هذا الدرس سوف يدرس تقسيم قطعة مستقيمة أو قطعة مستقيمة متجهة من الداخل أو من الخارج بالطريقتين المتجهة والإحداثية وسيدرس أيضًا كيفية إيجاد نسبة التقسيم إذا علم نهايتا القطعة المستقيمة.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يقسم قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج بالصيغة المتجهة.
- يقسم قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج بالصيغة الإحداثية.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة ويحدد نوع التقسيم.

مفردات أساسية

تقسيم من الداخل – تقسيم من الخارج – نسبة التقسيم.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٨٦ إلى صفحة ٨٩ .

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٤٠ .

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

٤ - ١

تقسيم قطعة مستقيمة

Division of a line segment

سوف تتعلم

- مفهوم التقسيم من الداخل
- مفهوم التقسيم من الخارج
- إيجاد نسبة التقسيم

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- تقسيم من الداخل Internal Division
- تقسيم من الخارج External Division
- نسبة التقسيم Ratio of Division

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



سبق أن درست إيجاد إحداثيى نقطة منتصف قطعة مستقيمة، فهل يمكنك إيجاد إحداثيى نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم؟

أولاً: إيجاد إحداثيى النقطة التى تقسم قطعة مستقيمة معلومة بنسبة معينة:

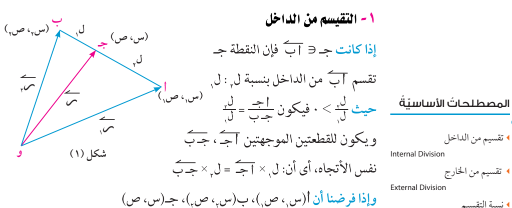
Coordinates of the point of division of a line segment

١ - التقيسم من الداخل

إذا كانت جـ ∈ $\overline{\text{اب}}$ فإن النقطة جـ تقسم $\overline{\text{اب}}$ من الداخل بنسبة $ل_٢ : ل_١$

حيث $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ فيكون $\frac{\text{اجـ}}{\text{جـب}} = \frac{ل_٢}{ل_١}$

ويكون للقطعتين الموجهتين $\overleftarrow{\text{اجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـب}}$ نفس الأتجاه، أى أن: $ل_١ \times \overleftarrow{\text{اجـ}} = ل_٢ \times \overleftarrow{\text{جـب}}$



شكل (١)

وإذا فرضنا أن ا$(س_١، ص_١)$، ب$(س_٢، ص_٢)$، جـ(س، ص)

فإن $\overleftarrow{ر_١}$ ، $\overleftarrow{ر_٢}$ ، $\overleftarrow{ر}$ هى المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{وا}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ ، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ على الترتيب، حيث و نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

وباستخدام طرح المتجهات: $ل_١ (\overleftarrow{\text{وجـ}} - \overleftarrow{\text{وا}}) = ل_٢ (\overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وجـ}})$

$ل_١ (\overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر_١}) = ل_٢ (\overleftarrow{ر_٢} - \overleftarrow{ر})$

بالتوزيع $ل_١ \overleftarrow{ر} - ل_١ \overleftarrow{ر_١} = ل_٢ \overleftarrow{ر_٢} - ل_٢ \overleftarrow{ر}$

$ل_١ \overleftarrow{ر} + ل_٢ \overleftarrow{ر} = ل_١ \overleftarrow{ر_١} + ل_٢ \overleftarrow{ر_٢}$

فيكون $\overleftarrow{ر} (ل_١ + ل_٢) = ل_١ \overleftarrow{ر_١} + ل_٢ \overleftarrow{ر_٢}$

أى أن: $\overleftarrow{ر} = \frac{ل_١ \overleftarrow{ر_١} + ل_٢ \overleftarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$ **وتسمى بالصيغة المتجهة**

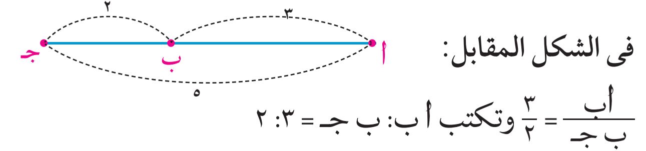
إجراءات الدرس

تمهيد:

فكر وناقش

يمكنك أن تمهد للدرس كالآتى:

فى الشكل المقابل:



$\frac{\text{اب}}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٢}$ وتكتب اب: ب جـ = ٣: ٢

ونستنتج أن: ٢ اب = ٣ ب جـ.

وإذا كانت $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ يعملان فى نفس الاتجاه

فإن: ٢ $\overleftarrow{\text{اب}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

وأيضًا يمكن استنتاج أن: $\frac{\text{اب}}{\text{اجـ}} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{اجـ}} = \frac{٢}{٥}$

يمكنك أن توضح لطلابك نوع التقسيم كالآتى:

- إذا كانت ب ∈ $\overline{\text{اجـ}}$ فإن ب تقسم $\overline{\text{اجـ}}$ من الداخل، جـ ∈ $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{اب}}$ فإن جـ تقسم $\overline{\text{اب}}$ من الخارج.
- إذا كانت ا ∈ $\overleftarrow{\text{جـب}}$، ا ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإن ا تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الخارج.

مثال

(١) إذا كانت أ (٢، −١)، ب (−٣، ٤) فأوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ بالصيغة المتجهة

الحل

بفرض جـ (س، ص)

∵ أ (٢، −١) ∴ $\overleftarrow{ر}_1$ = (٢، −١) ، ∵ ب (−٣، ٤) ∴ $\overleftarrow{ر}_2$ = (−٣، ٤)

ل٢ : ل١ = ٣ : ٢

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{ل_1 \overleftarrow{ر}_1 + ل_2 \overleftarrow{ر}_2}{ل_1 + ل_2}$$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{٢(٢، -١) + ٣(-٣، ٤)}{٢ + ٣} = \frac{(٤، -٢) + (-٩، ١٢)}{٥} = \frac{(-٥، ١٠)}{٥} = (-١، ٢)$$

∴ إحداثيا النقطة جـ هما (−١، ٢)

الصيغة الإحداثية:

$$(س، ص) = \frac{ل_1(س_1، ص_1) + ل_2(س_2، ص_2)}{ل_1 + ل_2} = \frac{(ل_1 س_1 + ل_2 س_2، ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2)}{ل_1 + ل_2}$$

ومنها ينتج أن:

$$(س ، ص) = \left(\frac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2} ، \frac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2}\right)$$

مثال

(٢) حل المثال السابق باستخدام الصيغة الإحداثية.

الحل

$$(س، ص) = \left(\frac{٢ \times ٢ + ٣ \times -٣}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times -١ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣}\right) = (-١، ٢)$$

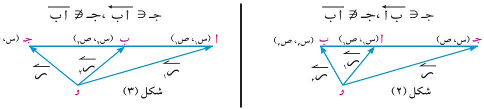
ب (−٣، ٤)
٢
جـ (س، ص)
٣
أ (٢، −١)

حاول أن تحل

(١) إذا كانت أ (٤، ٢)، ب (٨، −٦) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

٢- التقيسم من الخارج

إذا كانت جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ،جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ فإن جـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ل١ : ل٢ حيث $\frac{ل_2}{ل_1} < ٠$ وبالتالى تكون إحدى القيمتين ل١ أو ل٢ موجبة والأخرى سالبة، ويكون هناك احتمالان، والأشكال التالية توضح ذلك:



مثال إضافي

إذا كانت أ (٣، −١)، جـ (٥، ٢) والمطلوب إيجاد إحداثيي نقطة ب التى تقسم $\overline{\text{أجـ}}$ حيث ٢ $\overline{\text{أب}}$ = ٣ $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل:

∵ ٢ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فإن

$$٢(\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}) = ٣(\overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{ب})$$

(قاعدة طرح المتجهات)

$$٢\overleftarrow{ب} - ٢\overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{جـ} - ٣\overleftarrow{ب}$$

$$٥\overleftarrow{ب} = ٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{جـ}$$

$$\overleftarrow{ب} = \frac{٢(٣، -١) + ٣(٥، ٢)}{٥}$$

$$= (س، ص) = \left(\frac{٢١}{٥}، \frac{٤}{٥}\right)$$

تعلم: الصيغة المتجهة

□ وضح لطلابك أنه يمكن استخدام الصيغة المتجهة على النحو التالى:

$$\overleftarrow{ر}_2 = \frac{ل_1 \overleftarrow{ر}_1 + ل_2 \overleftarrow{ر}_2}{ل_1 + ل_2}$$

$$\overleftarrow{ر}_2 = \frac{٢(٣، -١) + ٣(٥، ٢)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢١}{٥}، \frac{٤}{٥}\right)$$

إرشاد:

يمكنك عرض طريقة أخرى لاستنتاج قانون التقسيم على النحو التالى:

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{ل_2}{ل_1}$$ أى أن:

$$ل_1 \overleftarrow{\text{أجـ}} = ل_2 \overleftarrow{\text{جـب}}$$

$$ل_1(\overleftarrow{\text{وجـ}} - \overleftarrow{\text{وأ}}) = ل_2(\overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وجـ}})$$

$$ل_1(\overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر}_1) = ل_2(\overleftarrow{ر}_2 - \overleftarrow{ر})$$

$$\overleftarrow{ر}(ل_1 + ل_2) = ل_1 \overleftarrow{ر}_1 + ل_2 \overleftarrow{ر}_2$$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{ل_1 \overleftarrow{ر}_1 + ل_2 \overleftarrow{ر}_2}{ل_1 + ل_2}$$

□ وضح لطلابك أن نسبة التقسيم تكون من الداخل إذا كان $\frac{ل_2}{ل_1} > ٠$، ومن الخارج إذا كان $\frac{ل_2}{ل_1} < ٠$.

أمثلة إضافية: على التقسيم من الخارج

إذا كان أ (٣، −١)، ب (٥، ٢) وكانت جـ $\in \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب فأوجد إحداثيي جـ من الخارج.

حل:

طالما التقسيم من الخارج فإن:

$-٢\ \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٣\ \overleftarrow{\text{جـ ب}}$

$-٢\ (\overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{أ}}) = ٣\ (\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{جـ}})$

أي: $\overleftarrow{\text{جـ}} = ٣\ \overleftarrow{\text{ب}} - ٢\ \overleftarrow{\text{أ}}$

$\overleftarrow{\text{جـ}} = ٣\ (٥، ٢) - ٢\ (٣، -١)$

$\overleftarrow{\text{جـ}} = (٩، ٨)$

وباستخدام الصيغة المتجهة فإن:

$\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{-٢\ \overleftarrow{\text{ر}}_١ + ٣\ \overleftarrow{\text{ر}}_٢}{-٢ + ٣}$

$= -٢\ (٣، -١) + ٣\ (٥، ٢) = (٩، ٨)$

وضح للطلاب أن $|\text{ل}_٢| > |\text{ل}_١|$

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل:

① $\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{٣(٤، ٢) + (٨، -٦)}{٣ + ١} = (٥، ٠)$

② $\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{٣(-٢، -١) - (٤، ٣)}{٣ - ١} = (-٥، -٣)$

تدريب إضافى:

- اطلب إلى طلابك حل الأمثلة السابقة بالطريقة الإحداثية ومطابقة الحل مع الصيغة المتجة.
- وضح لطلابك أنه إذا كانت $\text{ل}_١ = \text{ل}_٢$ فى قانون التقسيم فإن:

$\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ر}}_١ + \overleftarrow{\text{ر}}_٢}{٢}$

أي: $(\text{س}، \text{ص}) = \left(\dfrac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢}، \dfrac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

مثال

③ إذا كانت أ (٢، ٠)، ب (١، −١) فأوجد إحداثيي النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٥ : ٤.

الحل

$\because \overleftarrow{\text{ر}}_١ = (٢، ٠)، \overleftarrow{\text{ر}}_٢ = (١، -١)$

، $\text{ل}_٢ : \text{ل}_١ = ٥ : -٤$ $\qquad \dfrac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} < ٠$ أى سالبة

، $\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{\text{ل}_١ \overleftarrow{\text{ر}}_١ + \text{ل}_٢ \overleftarrow{\text{ر}}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$ الصيغة الرياضية للقانون

$\therefore \overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{-٤(٢، ٠) + ٥\ (١، -١)}{-٤ + ٥}$ بالتعويض

$\overleftarrow{\text{ر}} = (-٨ + ٥، ٠ - ٥) = (-٣، -٥)$ بالتوزيع، بالجمع والتبسيط

∴ إحداثيا نقطة جـ هما (−٣، −٥)

الصيغة الإحداثية:

$(\text{س}، \text{ص}) = \left(\dfrac{-٤ \times ٢ + ٥ \times ١}{-٤ + ٥}، \dfrac{-٤ \times ٠ + ٥ \times -١}{-٤ + ٥}\right)$

$= (-٣، -٥)$

لاحظ أن: إذا كانت جـ منتصف $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ $(\text{س}_١، \text{ص}_١)$، ب$(\text{س}_٢، \text{ص}_٢)$

فإن: $\text{ل}_١ = \text{ل}_٢ =$ (ل مثلًا) ويكون

$\overleftarrow{\text{ر}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ر}}_١ + \overleftarrow{\text{ر}}_٢}{٢}$ الصيغة المتجهة

$(\text{س}، \text{ص}) = \left(\dfrac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢}، \dfrac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$ الصيغة الإحداثية

حاول أن تحل

② إذا كان جـ (٢، ٤) منتصف $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (س، ٤)، ب (١، ص) أوجد كلًّا من س، ص

ثانيًا: إيجاد نسبة التقسيم Finding the ratio of Division

إذا كانت النقطة جـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة $\text{ل}_٢ : \text{ل}_١$ وكان:

١- نسبة التقسيم $\dfrac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} > ٠$ كان التقسيم من الداخل.

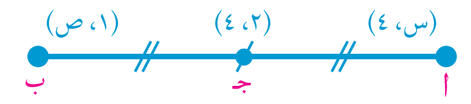
٢- نسبة التقسيم $\dfrac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} < ٠$ كان التقسيم من الخارج.

مثال

④ إذا كانت أ (٥، ٢)، ب (٢، −١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بكل من نقط تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مع محورى الإحداثيات، مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

٨٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التقييم المستمر:



لإيجاد قانون التنصيف فإن:

$٢ = \dfrac{\text{س} + ١}{٢} \qquad \therefore \text{س} = ٣$

$٤ = \dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٢} \qquad \therefore \text{ص} = ٤$

ثالثًا: لإيجاد نسبة التقسيم

وضح لطلابك أنه عند إيجاد نسبة التقسيم بأن تكون:

$\dfrac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} > ٠$ يكون التقسيم من الداخل

وأن:

$\dfrac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} < ٠$ يكون التقسيم من الخارج

وأنه من الأخطاء الشائعة لدى الطلاب مقارنة $\text{ل}_٢$ مع $\text{ل}_١$ بإحدى علامات التباين.

الحل

أولًا: نفرض أن محور السينات يقطع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ في النقطة جـ (س، ٠)

حيث $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$ فيكون: $\text{ص} = \frac{\text{ل}_1\text{ص}_1 + \text{ل}_2\text{ص}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$\therefore ٠ = \frac{\text{ل}_1(٢) + \text{ل}_2(-١)}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} = \frac{٢\text{ل}_1 - \text{ل}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$\therefore ٢\text{ل}_1 = \text{ل}_2$ $\qquad \therefore \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} = \frac{٢}{١}$ (نسبة التقسيم)

$\because \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} > ٠$ $\qquad \therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ٢ : ١

$\therefore$ إحداثيا جـ هما $\left(\frac{\text{ل}_1\text{س}_1 + \text{ل}_2\text{س}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}، ٠\right)$ أي $\left(\frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢}، ٠\right)$

ويكون إحداثيا نقطة جـ هما (٣، ٠)

ثانيًا: المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ى

نفرض أن إحداثيي النقطة ى هما (٠، ص)

حيث $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$ فيكون $\text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_1 + \text{ل}_2\text{س}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$\therefore ٠ = \frac{\text{ل}_1 \times ٥ + \text{ل}_2 \times ٢}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$\therefore ٢\text{ل}_2 = -٥\text{ل}_1$ $\qquad \therefore \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} = -\frac{٥}{٢}$ (نسبة التقسيم)

$\because \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} < ٠$ $\qquad \therefore$ التقسيم من الخارج نسبة ٥ : ٢

إحداثيا نقطة ى هما (٠، ص) أي $\left(٠ ، \frac{-٢ \times ٢ + ٥ \times -١}{-٢ + ٥}\right)$

$\therefore$ إحداثيا ى هما (٠، -٣)

فكر: فى المثال السابق استخدم الصورة المتجهة لإيجاد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بمحورى الإحداثيات، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت أ (- ٤، ٣)، ب (٨، ٦)، جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث جـ (س، ٠)، فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بالنقطة جـ مبينًا نوع التقسيم، ثم أوجد قيمة س.

تحقق من فهمك

(١) إذا كانت أ (٠، - ٣)، ب (٣، ٦) فأوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) **الربط بالمسافة:** تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ إلى المدينة ب حيث أ(٥، - ٦)، ب(- ١، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها. أوجد إحداثيات النقطتين التى توقفت عندهما السيارة إذا كانت:

أ) توقفت فى منتصف الطريق. ب) توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ.

فى مثال (٤):

وضح لطلابك أنه لإيجاد النسبة $\text{ل}_1 : \text{ل}_2$ التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (س$_1$، ص$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$) نضع س = ٠ فى العلاقة:

$$\text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_1 + \text{ل}_2\text{س}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

فيكون $\text{ل}_1\text{س}_1 + \text{ل}_2\text{س}_2 = ٠$ ومنها $\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} = \frac{-\text{س}_1}{\text{س}_2}$

فتكون نقطة التقسيم = $\left(٠، \frac{\text{م}_1\text{ص}_1 + \text{م}_2\text{ص}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\right)$

وبهذه الملاحظة يمكن حل المثال.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(٤) $\text{ل}_2 : \text{ل}_1 = ١ : ٢$ والتقسيم من الخارج

٥س = -١٦

التدريب والتقييم

إجابة تحقق من فهمك

(١) (١، ٠)

(٢) (٢، -٣)، (١، -٢)

تقييم الدرس:

(١) إذا كانت النقطة (٤، ٤) تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ بنسبة ٢:١ وكانت أ (٧، ٨) فأوجد إحداثيى ب.

(٢) إذا كانت أ (-٢، ٣)، ب (٤، -٢) فأوجد النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة المستقيم.

نشاط إضافى للطلاب المتفوقين

أثبت أن النقاط أ (-١، ٢)، ب (-٢، -١)، جـ (٣، -١) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين وأوجد مساحته.

تقييم أنشطة كراسة الأنشطة

نشاط (١) صفحة (٢)

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة بصورة صحيحة ويوضح كيفية التحقق من صحة الإجابة
جيد جدًا ٨ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة بصورة صحيحة، ولكن قد يصعب عليه توضيح كيفية التحقق من صحة الإجابة.
جيد ٧ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة، ولكنه يحتاج لبعض المساعدة؛ ليتحقق من صحة الإجابة.
مقبول ٥ درجات	يعرض الطالب خطوات تمثيل المتباينة، ولكنه يحتاج لبعض المساعدة والتحقق من صحة الإجابة.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع الطالب عرض خطوات تمثيل المتباينة، ويحتاج للمساعدة والتوجيه.

٤ - ٢

معادلة الخط المستقيم

Equation of the straight line

---

٤ - ٢

معادلة الخط المستقيم

Equation of the straight line

سوف تتعلم

- إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة معلومة ومتجة اتجاه له.
- إيجاد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الأجزاء المقطوعة من المحورين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متجه اتجاه مستقيم vector direction of Straight line
- معادلة متجهة Vector equation
- معادلة بارامترية Parametric equation
- معادلة كارتيزية Cartisian equation
- معادلة عامة General equation

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر و ناقش

سبق أن درست المعادلة العامة للخط المستقيم وهى:

أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠ ومثلتها بيانيًّا بخط مستقيم.

بين أى من العلاقات التالية تمثل خطًّا مستقيمًا:

(أ) ٣س − ٢ص = ٥ (ب) ص = $\sqrt{س}$ + ١ (جـ) ص = ٣

(د) س − $\sqrt{٢}$ = ٠ (هـ) ص + $\frac{١}{س}$ = ٢ (و) $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٢}$ = ١

لاحظ أن المعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب لايساويان الصفر معا تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١- إذا كان ب = ٠ ، أ ≠ ٠ فإن: أ س + جـ = ٠

أى أن: س = $\frac{-جـ}{أ}$ وهى معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة ($\frac{-جـ}{أ}$، ٠)

٢- إذا كان أ = ٠ ، ب ≠ ٠ فإن: ب ص + جـ = ٠

أى أن: ص = $\frac{-جـ}{ب}$ وهى معادلة مستقيم موازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٠، $\frac{-جـ}{ب}$)

٣- إذا كان جـ = ٠ فإن: أ س + ب ص = ٠

وهى معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

حاول أن تحل

(١) أى من المستقيمات الآتية يكون موازيا لمحور الصادات، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات، وأيها يمر بنقطة الأصل، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محورى الإحداثيات (إن وجدت).

(أ) ٢س + ٣ = ٠ (ب) س + ٣ص = ٠

(جـ) ٢س + ٣ص = ١٢ (د) ص − ٥ = ٠

تفكير ناقد: إذا كان ل خطًّا مستقيمًا، ق نقطة فى المستوى، ق ∉ ل فكم عدد المستقيمات التى تمر بالنقطة ق وتوازى الخط المستقيم ل؟

ل ق

٩٠ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

خلفية

سبق للطالب أن درس معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات، وفى هذا الدرس سوف يدرس الصورة المتجهة والصورة الكارتيزية لمعادلة الخط المستقيم، كما سيدرس الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستنتج معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة معلومة ومتجه اتجاه له.
- يتعرف على الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الأجزاء المقطوعة من المحورين.

مفردات أساسية

متجه اتجاه مستقيم – معادلة متجهة – معادلة بارامترية – معادلة كارتيزية – معادلة عامة.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بيانى.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

الكتاب الدراسى من صفحة ٩٠ إلى صفحة ٩٥ كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٤١ إلى صفحة ٤٢.

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

ذكر طلابك بما سبق أن درسوه من معادلة الخط المستقيم.

فكر وناقش:

أكد على الطلاب بأن معادلة الخط المستقيم هى:

أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب لايساويا الصفر معًا و إلا اختفت المتغيرات من المعادلة وأصبحت جـ = ٠ لا تمثل معادلة خط مستقيم، ثم درب طلابك تحديد المعادلات التى تمثل خط مستقيم من بين المعادلات المعطاة، والتى تنطبق عليها الشروط وتنطبق الشروط على المعادلات أ، جـ، د، و فقط من بين المعادلات المعطاة.

أكد كذلك فى نفس البند على صورة معادلة الخط المستقيم فى ضوء الشروط المعطاة فى البنود (١)، (٢)، (٣).

عرض الدرس

التقييم المستمر

إجابات حاول ان تحل

(١) (أ) يوازى محور الصادات، نقط التقاطع ($-\frac{٣}{٢}$، ٠)

(ب) يمر بنقطة الأصل.

(جـ) يقطع محورى الإحداثيات فى النقاط (٠، ٤)، (٦، ٠)

(د) يوازى محور السينات ونقطة التقاطع هى (٠، ٥)

تفكير ناقد: عدد المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة (عدد لانهائى) ولكن يوجد منها مستقيمًا واحدًا فقط يوازى المستقيم المعلوم ل.

ميل الخط المستقيم — Slope of a straight line

سبق أن عرفت أنه يلزم لتعيين الخط المستقيم تعينًا تامًّا شرطان مثل نقطة معلومة ، ميل الخط المستقيم، كما علمت أن ميل الخط المستقيم (م) المار بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) يساوي $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

ملاحظة (١) إذا كان $ل_1 // ل_2$ فإن $م_1 = م_2$

أى أنه إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

(٢) إذا كان $ل_1 \perp ل_2$ فإن $م_1 \times م_2 = -١$

أى أنه حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١ وعكس ذلك صحيح.

حاول أن تحل

(٢) أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية، وبين أيًّا من هذه المستقيمات متوازيًا وأيها متعامد:

أ (٣، ١) ، (-٢، ٥) ب (٤، ٠) ، (٢، -١)

ج (٧، -١) ، (٣، -٣) د (-٥، -٢) ، (-١، ٣)

تعلم

متجه اتجاه المستقيم — Direction vector of a straight line

> **تعريف** كل متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم يسمى متجه اتجاه للخط المستقيم ل

فإذا كانت النقاط أ، ب، جـ ∈ ل فإن $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم.

فمثلًا: إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (٢، ١) متجه اتجاه للمستقيم

فإن كلًّا من المتجهات (٤، ٢)، (-٢، -١)، (١، $\frac{1}{2}$)،... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

وبوجه عام إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (أ، ب) متجه اتجاه للمستقيم

فإن ك $\overleftarrow{ى}$ حيث ك ∈ ح - {٠} متجه اتجاه لنفس المستقيم. لماذا؟

حاول أن تحل

(٣) إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (٢، -٣) متجه اتجاه لمستقيم فأى مما يأتى يكون متجه اتجاه لنفس المستقيم؟

أ (-٢، ٣). ب (-٢، -٣).

ج (٢، ٣). د (٦، -٩).

معادلة المستقيم بمعلومية نقطة عليه ومتجه الاتجاه له

أولاً: الصيغة المتجهة — Vector form

لتعيين معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ق، والمتجه $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه له،

نفرض نقطة ن تقع على الخط المستقيم ل.

وأن $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{ق}$ هما المتجهان الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overleftarrow{و ن}$ ، $\overleftarrow{و ق}$ على الترتيب، حيث و أى نقطة فى المستوى.

إذن، يوجد عدد ك ∈ ح - {٠} بحيث أن $\overleftarrow{ق ن}$ = $\overleftarrow{ر}$ - $\overleftarrow{ق}$ = ك $\overleftarrow{ى}$

وبالتالى فإن: $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

تسمى هذه الصورة بالمعادلة المتجهة للخط المستقيم ل المار بالنقطة ق، والمتجه $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه له.

مثال

(١) اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، -٣) ومتجه الاتجاه له (١، ٢).

الحل

بفرض أن المستقيم يمر بالنقطة ق (٢، -٣) ، $\overleftarrow{ى}$ = (١، ٢)

∵ $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هى $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -٣) + ك(١، ٢).

حاول أن تحل

(٤) اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (-٤، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢، ٥).

ثانيًا: المعادلات الوسيطية (البارامترية) — The parametric equations

المعادلة المتجهة هى $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

إذا كانت ق (س١، ص١) ، ر (س، ص) بالنسبة لنظام إحداثى متعامد، و نقطة الأصل، وكان $\overleftarrow{ى}$ = (أ، ب)

فإن معادلة المستقيم هي (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

ومنها ينتج أن: $س = س_1 + ك\, أ$ ، $ص = ص_1 + ك\, ب$

وهما المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم المار بالنقطة (س١، ص١) والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (أ، ب) متجه اتجاه له. حيث ك ∈ ح - {٠}.



ميل الخط المستقيم:

ذكر طلابك بما درسوه عن ميل الخط المستقيم بما تقتضيه الضرورة، ونستخدم فى هذا البند ميل الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين، ثم التأكيد على توازى وتعامد مستقيمات، وفى التدريب المعطى نوجد ميل المستقيم لكل زوج من النقاط فتكون كالآتى:

$م_1 = \frac{-4}{5}$ ، $م_2 = \frac{1}{2}$ ، $م_3 = \frac{1}{2}$ ، $م_4 = \frac{5}{4}$

لذلك فإن:

$م_2 = م_3$ **(مستقيمان متوازيان)،**

$م_1 \times م_4 = -1$ **(مستقيمان متعامدان)**

إرشاد: لاحظ الفرق بين الزوج المرتب الذى يمثل بنقطة فى المستوى الإحداثى وصيغة متجه الاتجاه الذى يكتب على صورة زوج مرتب، ولكنه يخضع لخاصية الضرب فى مقدار ثابت ≠ ٠ فمثلًا إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (٣، ٤) فيكتب بعدة صور منها $\frac{4}{3}$، ومن خصائص الكسر أنه يمكن ضرب بسط ومقام الكسر فى أى عدد ك ≠ ٠

التقييم المستمر

إجابات حاول ان تحل

(٢) الإجابات الصحيحة هي: أ، د



معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة عليه ومتجه الأتجاه له:

- وضح للطلاب إن: $\overleftarrow{ق ر}$ // $\overleftarrow{ى}$ أى أن:

$\overleftarrow{ق ن}$ = ك $\overleftarrow{ى}$ حيث ك ∈ ح = {٠}

وباستخدام مفهوم طرح المتجهات نجد أن:

$\overleftarrow{و ن}$ - $\overleftarrow{و ق}$ = ك $\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{و ن}$ = $\overleftarrow{و ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ق}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ حيث:

$\overleftarrow{ر}$ = (س، ص) + ك (أ، ب)

- ناقش مع طلابك فى الفرق بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ كأزواج مرتبة، $\overleftarrow{ى}$ كمتجه اتجاه.

التقييم المستمر

حاول أن تحل:

(٣) المعادلة المتجهة هى $\overleftarrow{ر}$ = (-٤، ٣) + ك (٢، ٥)

تدريبات إضافية:

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم إذا كان:

أ ق (−٢، ٣)، $\vec{ى}$ = (١، ٢)

ب ق (٠، ٠)، $\vec{ى}$ = (٣، −٤)

□ اسأل الطلاب: ما ملاحظتك على المعادلات السابقة؟

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل:

٤ المعادلتين البارامتريتين هما: س = −ك، ص = ٥ + ٤ ك

ارشاد: فى الصورة الكارتيزية: $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م نلاحظ أن

ص − $ص_1$ = م (س − $س_1$)

ص − $ص_1$ = م س − م $س_1$

∴ ص = م س + ($ص_1$ − م $س_1$)

أى أن: ص = م س + جـ حيث جـ = ($ص_1$ − م $س_1$)

وهى صيغة أخرى لمعادلة الخط المستقيم الذى يقطع جزءًا طول ($ص_1$ − م $س_1$) من محور الصادات.

إذا مر المستقيمان بنقطتين معلومتين ق، ن فإن

$\vec{ى}$ = ($\vec{ن}$ − $\vec{ق}$) هو متجه اتجاه المستقيم، وبذلك فإن المعادلة الموجهة للمستقيم ل تكون

$\vec{ر}$ = $\vec{ق}$ + ك ($\vec{ن}$ − $\vec{ق}$)

أى: (س، ص) = ($س_1$، $ص_1$) + ك ($س_2$ − $س_1$، $ص_2$ − $ص_1$)

وبحذف ك فإن: = $\frac{س - س_1}{س_2 - س_1} = \frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1}$

أى أن = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ أى $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٥ س − ص − ٧ = ٠

إجابة تفكير ناقد:

أولاً: $\vec{ر}$ = ($س_1$، ٠) + ك (٠، ١)، س = $س_1$

ثانيًا: $\vec{ر}$ = (٠، $ص_1$) + ك (١، ٠)، ص = $ص_1$

ثالثًا: $\vec{ر}$ = ك (أ، ب)، ص = $\frac{ب}{أ}$ س حيث $\frac{ب}{أ}$ = م

متجه اتجاه العمودى للمستقيم

□ ناقش طلابك فى تعريف متجه اتجاه العمودى للمستقيم مستعينًا بما ورد فى صفحة (٩٢) من كتاب الطالب.

مثال

٢ اكتب المعادلتين الوسيطيتين (البارامتريتين) للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٤، −٣) ومتجه اتجاه له (٢، ٣).

الحل

بفرض أن ق (٤، −٣) ∈ للمستقيم ل ، $\vec{ى}$ = (٢، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم ل هى (س، ص) = (٤، −٣) + ك(٢، ٣) — الصورة المتجهة

وتكون المعادلتان س = ٤ + ٢ ك ، ص = −٣ + ٣ ك — المعادلتان البارامتريتان

حاول أن تحل

٥ اكتب المعادلتين البارامتريتين للمسقيم الذى يمر بالنقطة (٠، ٥) ومتجه الاتجاه له هو (−١، ٤).

ثالثًا: المعادلة الكارتيزية Cartesian Equation

بحذف ك من المعادلتين البارامتريتين: س = $س_1$ + ك أ ، ص = $ص_1$ + ك ب

نحصل على المعادلة: $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$ أى أن: $\frac{ب}{أ} = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

وبوضع $\frac{ب}{أ}$ = م (حيث م هو ميل المستقيم) فإن المعادلة تصبح على الصورة: م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

مثال

٣ أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،−٤) ومتجه الاتجاه له (٢، −١)

الحل

م = $\frac{-1}{2}$ — ميل المستقيم م = $\frac{ب}{أ}$

م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ — معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تنتمى إليه.

$\frac{-1}{2} = \frac{ص - (-4)}{س - 3}$ — بالتعويض عن م = $\frac{-1}{2}$، $س_1$ = ٣، $ص_1$ = −٤

٢ص + ٨ = −س + ٣ — حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

س + ٢ ص + ٥ = ٠ — الصورة العامة.

حاول أن تحل

٦ أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، −٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

تفكير ناقد: أوجد المعادلات المتجهة والمعادلات الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة ($س_1$، $ص_1$) ومتجه الاتجاه له $\vec{ى}$ = (أ، ب) فى الحالات الآتية:

أولًا: إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات.

ثانيًا: إذا كان المستقيم يوازى محور السينات.

ثالثًا: إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل.

أضف إلى معلوماتك: متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة ($س_1$، $ص_1$) هو $\vec{ى}$ = ($س_1$، $ص_1$) وميله هو $\frac{ص_1}{س_1}$

تعلم

متجه اتجاه العمودى للمستقيم
The perependicular direction vector of a straight line

إذا كان $\vec{ى}$ = (أ، ب) متجه اتجاه مستقيم **فإن** أيًّا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب، −أ) حيث ك ∈ ح − {٠} يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه $\vec{ى}$.

وبالعكس **إذا كان** $\vec{ن}$ = (أ، ب) عموديًّا على خط مستقيم **فإن** أيًّا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب، −أ) حيث ك ∈ ح − {٠} يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلًا: إذا كان $\vec{ى}$ = (٣، ٢) متجه اتجاه للمستقيم فإن متجه اتجاه العمودى له هو (−٢، ٣)، (٢، −٣)، (−٤، ٦)، ...

حاول أن تحل

٧ إذا كان $\vec{ى}$ = ($\frac{1}{2}$، ١) متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عموديًا على المستقيم عدا المتجه:

أ (١، −$\frac{1}{2}$) ب (٢، −١) جـ (−١، −$\frac{1}{2}$) د (٤، −٢)

مثال

٤ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطة ق (−٣، ٥) والمتجه (−١، ٢) عمودى عليه فأوجد:

أ المعادلة المتجهة للمستقيم. ب المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

الحل

أ ∵ المستقيم المار بالنقطة ق (−٣، ٥) عمودى على المتجه (−١، ٢).

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\vec{ى}$ = (٢، ١)

∵ المعادلة المتجهة للمستقيم هى: $\vec{ر}$ = $\vec{ق}$ + ك $\vec{ى}$

∴ $\vec{ر}$ = (−٣، ٥) + ك(٢، ١)

ب ∵ معادلة المستقيم الذى ميله م ويمر بالنقطة ($س_1$، $ص_1$) هى: م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{ص - 5}{س + 3}$ — بالتعويض عن م = $\frac{1}{2}$ وإحداثى النقطة (−٣، ٥).

∴ س + ٣ = ٢ ص − ١٠

وتكون س − ٢ ص + ١٣ = ٠ هي المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

فكر: أوجد المعادلة الكارتيزية لنفس المستقيم، وذلك بحذف ك من المعادلتين البارامتريتين.

حاول أن تحل

٨ إذا كان المستقيم المار بالنقطة و (٢، −٣) عموديًا على المتجه $\vec{ى}$ = (−١، ٢) فأوجد:

أ المعادلة المتجهة للمستقيم. ب المعادلتين البارامتريتين للمستقيم.

جـ المعادلة الكارتيزية للمستقيم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(٦) ماعدا جـ

إجابة بند فكر:

$\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \frac{\text{ص} - ٥}{١}$ ومنها س − ٢ ص + ١٣ = ٠

إجابة حاول أن تحل:

(٧) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢، −٣) + ك (٢، ١)

س = ٢ + ٢ ك ، ص = −٣ + ك

$\frac{\text{س} - ٢}{٢} = \frac{\text{ص} + ٢}{١}$ أى س − ٢ ص − ٨ = ٠

معادلة المستقيم بمعلومية الجزأين المقطوعين من محورى الإحداثيات.

- ناقش مع طلابك كيفية إيجاد معادلة المستقيم بمعلومية الجزأين المقطوعين من محور الإحداثيات مستعينًا بما ورد فى صفحة ٩٣ من كتاب الطالب.

التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل:

(٨) ٣، −٥

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

أ) ٤ س − ٣ ص − ١٢ = ٠

ب) ٢ س − ٣ ص − ٣ = ٠

جـ) ٣ س + ٢ ص + ٢ = ٠

التقييم

(١) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة ق (٥، −١) والمتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (٤، ٠) ب (٣، −١) متجه اتجاه له.

(٢) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٠، ٣)، (−٥، ٠)

(٣) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{٢}{٣}$ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات يساوى ٤ وحدات.

انشطة إضافية للطلاب المتفوقين:

إذا كانت أ (−٤، ٤)، ب (−١، −٢)، جـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة ١ : ٢ فأوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة جـ والنقطة (٢، ٣)

تعلم **معادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات**

The Equation of the straight line in terms of the two intercepts parts from the two axes

نعلم أن معادلة المستقيم الذى ميله (م) ويقطع جزءا من محور الصادات طوله ب هى: ص = م س + ب

من الشكل المقابل

نجد أن ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ،٠)، (٠،ب) هو: م = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ (لماذا؟)

$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = م — معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{أ}} = -\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ — بالتعويض عن إحداثى نقاط التقاطع

أ ص = − ب س + أ ب — حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

ب س + أ ص = أ ب — بقسمة الطرفين على أ ب

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

مثال

(٥) أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم: ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

الحل

بوضع المعادلة على الصورة $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

∴ $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$ (لماذا؟)

∴ طولا الجزأين المقطوعين من المحورين السينى والصادى هما ٤، ٣ على الترتيب

حاول أن تحل

(٩) أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين بالمستقيم: ٥ س − ٣ ص = ١٥

تحقق من فهمك

أوجد المعادلة العامة للمستقيم فى الحالات الآتية:

أ) يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين (٣، ٠)، (٠، −٤).

ب) يمر بالنقطة (٣، ١) ويوازى المستقيم ٢ س − ٣ ص + ٧ = ٠

جـ) يمر بالنقطة (٠، −١) ومتجه الاتجاه له (٢، −٣)



٤ - ٣

قياس الزاوية بين مستقيمين

٤ - ٣ قياس الزاوية بين مستقيمين

Measure of the angle between two straight lines

سوف تتعلم

- إيجاد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاوية بين مستقيمين
Anagle between two straight lines

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
Scientific calculator

تعلم **قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين**

Measure of the acute angle between two straight lines

إذا كانت هـ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ اللذين ميلاهما $م_1$، $م_2$ فإن:

$$ظا هـ = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right| \quad حيث\ م_1 م_2 \neq -1$$

مثال

١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية

٣ س – ٤ ص – ١١ = ٠ ، س + ٧ ص + ٥ = ٠

الحل

أ نوجد ميل كل من المستقيمين:

$(م_1) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ ميل المستقيم الأول

$(م_2) = \frac{-1}{7}$ ميل المستقيم الثانى

$ظاهـ = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$ صيغة القانون

$ظاهـ = \left|\frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{7})}\right|$ بالتعويض عن قيمتى $م_1$، $م_2$

$= \left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}}\right| = \left|\frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}}\right| = 1$

هـ = ٤٥°

تذكر: ميل الخط المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ يساوى $\frac{-أ}{ب}$

تعبير شفهى: اذكر العلاقة بين المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ فى الحالات الآتية:

أ إذا كان ظل الزاوية بينهما يساوى صفرًا.

ب إذا كان ظل الزاوية بينهما غير معرف.

جـ إذا كان ميل الأول $م_1$ وميل الثانى $م_2$ فاذكر العلاقة بين $م_1$، $م_2$ فى أ، ب.

٩٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

خلفية

سبق أن درس الطالب العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين، وفي هذا الدرس سوف يدرس الطالب كيفية إيجاد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.

مفردات أساسية

زاوية بين مستقيمين.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة عملية.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٩٦ إلى صفحة ٩٧

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحات ٤٣ إلى صفحة ٤٤

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

إجراءات الدرس

التمهيد

راجع مع طلابك شرط توازى مستقيمين، وشرط تعامد مستقيمين، موضحًا ذلك بالأمثلة.

تعلم: قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

يمكنك أن توضح للطلاب بأنه إذا كان

هـ = ٠° فتكون $ظا\ \theta = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$

أى أنه $م_1 - م_2 = 0$

أى $م_1 = م_2$ (المستقيمان متوازيان)

هـ = ٩٠° فتكون $ظا\ 90° = \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}$

$\therefore ظا\ 90° = \frac{1 + م_1 م_2}{م_1 - م_2}$

$م_1 \times م_2 + 1 = 0$ $م_1 م_2 = -1$

(المستقيمان متعامدان)

توسيع: من الشكل فى بداية صفحة (٩٦):

$هـ_1$ زاوية خارجة عن المثلث

$هـ_1 = هـ_2 + هـ$ ، ومنها $هـ = هـ_1 - هـ_2$

$ظاهـ = ظا\ (هـ_1 - هـ_2)$

$= \frac{ظاهـ_1 - ظاهـ_2}{1 + ظاهـ_1 ظاهـ_2}$

$= \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}$

يمكنك استنتاج القانون من تعريف الزاوية بين متجهين باستخدام الضرب القياسى.

قياس الزاوية بين مستقيمين

حاول أن تحل

(١) أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية:

أ $\overleftarrow{ر} = (٠، -٢) + ك(٣، -١)$ ، $\overleftarrow{ر} = (٠، ٥) + ك(١، ٢)$.

ب س + ٢ص + ٣ = ٠ ، س − ٣ص + ١ = ٠ ج ٢ص = ٣ ، ٢س + ص = ٤

مثال

(٢) الربط بالهندسة: أ ب جـ مثلث فيه أ (٠، ٥)، ب (٢، −١)، جـ (٦، ٣) أثبت أن المثلث متساوى الساقين، ثم أوجد قياس زاوية أ.

الحل

البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ صيغة القانون

أ ب = $\sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (٥ - (-١))^٢} = ٢\sqrt{١٠}$

أ جـ = $\sqrt{(٠ - ٦)^٢ + (٥ - ٣)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$

ب جـ = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (-١ - ٣)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

المثلث متساوى الساقين؛ لأن أ ب = أ جـ

نلاحظ أن (ب جـ)^٢ < (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢

أى أن ∠ أ حادة

$م_١ = \frac{٥ - (-١)}{٠ - ٢} = -٣$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$

$م_٢ = \frac{٥ - ٣}{٠ - ٦} = -\frac{١}{٣}$ ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$

ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$ صيغة القانون

ظا أ = $\left|\frac{-٣ - (-\frac{١}{٣})}{١ + (-٣)(-\frac{١}{٣})}\right| = \frac{٤}{٣}$ بالتعويض عن قيمتى $م_١$، $م_٢$

ق(∠ أ) = ٤٩″ ٧′ ٥٣° باستخدام الحاسبة

لاحظ

عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين فى إيجاد قياس زاوية داخلة لمثلث يجب أولا تحديد نوع الزاوية (حادة − قائمة − منفرجة)

حاول أن تحل

(٢) فى المثال السابق أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب رقمين عشريين.

تحقق من فهمك

(١) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $\overleftarrow{ى} = (٢، ٠) + ك(-٢، ١)$، $\overleftarrow{ر} = (-٣، ١) + ك(٦، ٣)$.

(٢) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س − ٢ص + ٣ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٤، −١)، (٢، ١).

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ (٠، ٢)، ب(٣، ١)، جـ(−٢، −١). أوجد قياس زاوية أ

٩٧ كتاب الطالب − الفصل الدراسى الثانى

عرض الدرس

التقييم المستمر:

إجابة تعبير شفهى:

أ إذا كان ظا هـ = صفرًا

فإن ق(∠هـ) = صفر° أى أن المستقيمين متوازيان

ب إذا كان ظا هـ (غير معرف)

فإن ق(∠هـ)= ٩٠° أى أن المستقيمين متعامدان

جـ إذا كان المستقيمان متوازيين فإن $م_١ = م_٢$

وإذا كان المستقيمان متعامدين فإن $م_١ م_٢ = -١$

إجابة حاول أن تحل:

(١) أ $م_١ = -\frac{١}{٣}$ ، $م_٢ = ٢$ ، ظا هـ = ٧+،

ق(∠هـ) = ١٢″ ٥٢′ ٨١°

ب $م_١ = -\frac{١}{٢}$، $م_٢ = \frac{١}{٣}$ ، ظا هـ = $+\frac{١}{٧}$،

ق(∠هـ) = ٤٨″ ٧′ ٨°

جـ $م_١ = ٠$، $م_٢ = -٢$ ، ظا هـ = ٢،

ق(∠هـ) = ٦″ ٢٦′ ٦٣°

(٢) أ ب = $٢\sqrt{١٠}$ ، أ جـ = $٢\sqrt{١٠}$

م (△ أ ب جـ)= $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ حا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ حا ٤٩″ ٧′ ٥٣° ≃ ١٦ سم^٢

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

(١) $م_١ = -\frac{١}{٢}$، $م_٢ = \frac{١}{٢}$، ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$

ق(∠هـ) = ٤٩″ ٧′ ٥٣°

(٢) $م_١ = \frac{١}{٢}$، $م_٢ = -١$، ظا هـ = ٣

ق(∠هـ) = ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

التقييم

(١) أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية:

أ $\overleftarrow{ر} = (-٢، -٣) + ك (١، -٢)$،

$\overleftarrow{ر} = (٣، ٠) + ك (٢، ٣)$

ب ٢ س + ص + ٧ = ٠ ، س − ٣ ص + ٨ =٠

جـ ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠ ، س − ٢ ص = ٦

(٢) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (−٤، ٠) ويوازى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١، ١) + ك (−٢، ٥)

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٥، −٥) ويكون عموديًا على المستقيم.

$\overleftarrow{ر}$ = (−٢، ٤)، + ك (٣، −١)

نشاط إثرائى للطلاب الفائقين:

(١) أوجد معادلة محور $\overline{أب}$ حيث أ (٣، −٢)، ب (١، ٦)

[الاجابة: س + ٣ ص − ٧ = ٠]

(٢) أثبت أن النقطة م (٥، −٤) هى مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ حيث أ (١، −١)، ب (١، −٧)، جـ (٢، ٠)، ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ.

[للإجابة: م أ = م ب = م جـ = ٥]

معادلة المماس عند أ هى: − ٤ س + ٣ ص + ٧ = ٠

٤ - ٤

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

خلفية

سبق أن درس الطالب كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين معلومتين، وسوف تدرس فى هذا الدرس طول العمود المرسوم من نقطة (لاتنتمى إلى الخط المستقيم) إلى الخط المستقيم.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة معلوة إلى خط مستقيم.

مفردات أساسية

طول عمود – خط مستقيم.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ٩٨ إلى صفحة ٩٩

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٤٥ إلى صفحة ٤٦

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

إجراءات الدرس

التمهيد

ناقش مع طلابك مفهوم العمود المرسوم من نقطة خارج مستقيم إلى المستقيم وكيفية استخدام الأدوات الهندسية فى رسمه.

تعلم:

يمكنك أن تنصح طلابك بأنه إذا كان $(\text{س}_1، \text{ص}_1)$، $(\text{س}_2، \text{ص}_2)$ إحداثيًا نقطتين فى المستوى الذى يحوى الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ وكان المقداران $\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}$، $\text{أ س}_2 + \text{ب ص}_2 + \text{جـ}$ لهما نفس الإشارة


٤ - ٤

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

The length of the perpendicular from a point to a straight line

سوف تتعلم

- إيجاد طول العمود المرسوم من نقطة معلومة إلى خط مستقيم.

تعلم

إيجاد طول العمود المرسوم من نقطة معلومة إلى خط مستقيم

The length of the perpendicular from a point to a straight line

إذا كانت النقطة $(\text{س}_1، \text{ص}_1)$ لا تنتمى للمستقيم الذى معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن طول العمود (ل) المرسوم من هذه النقطة إلى المستتقيم يتحدد من العلاقة: $\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- عمود Perpendicular
- خط مستقيم Straight Line

مثال

(١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، –٥) إلى الخط المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠، ٢) + ك(٤، ٣).

الحل

نفرض أن (س، ص) = (٠، ٢) + ك (٤، ٣)

∴ س = ٤ ك ، ص = ٢ + ٣ك (المعادلتان الوسطيتان للمعادلة المتجهة)

$\frac{\text{س}}{٤} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣}$ بحذف ك

٣س = ٤ص – ٨ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٣س – ٤ص + ٨ = ٠ المعادلة الكارتيزية

$\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ صيغة قانون طول العمود

بالتعويض: أ = ٣ ، ب = –٤ ، جـ = ٨ ، س_1 = ٤ ، ص_1 = –٥

$\text{ل} = \frac{|٣ \times ٤ - ٤ \times -٥ + ٨|}{\sqrt{٣^2 + ٤^2}}$

$= \frac{|١٢ + ٢٠ + ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٤٠|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ وحدات طول

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

حاول أن تحل

(١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، –٥) إلى المستقيم: $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (–١، ٠) + ك(١٢، ٥).

٩٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم، و إن اختلفا فى الإشارة كانت النقطتان على جانبى الخط المستقيم.

فى مثال محلول (١): يمكنك أن توضح للطلاب أنه عند إيجاد المعادلة الإحداثية يمكن إيجاد ميل المستقيم $(-\frac{٣}{٤})$ وبمعلومية النقطة المعطاة (٠ ، ٢) يمكن استخدام المعادلة

$\text{م} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ (بمعلومية الميل ونقطة)

عرض الدرس

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(١) المعادلة الإحداثية هى: $\frac{\text{س} + ١}{١٢} = \frac{\text{ص}}{٥}$

٥س – ١٢ ص – ٥ = ٠

طول العمود = $\frac{٧٥}{١٣}$

(٢) **تعبير شفهى:** اكتب طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم م فى الحالات الآتية:

أ) أ (٠ ، ٠) ، م : اس + ب ص + جـ = ٠

ب) أ (س١، ص١) ، م : ص = ٠   جـ) أ (س١، ص١) ، م : س = ٠

مثال

(٢) **في الشكل المقابل:** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٦، −٢) إلى المستقيم المار بالنقطتين ب (٤، ٤)، جـ (١، ٠)، ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ.

الحل

م = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$	صيغة الميل
∵ جـ (١، ٠) ، ب (٤، ٤)	
∴ م = $\frac{٤ - ٠}{٤ - ١}$ = $\frac{٤}{٣}$	بالتعويض بالنقطتين (٤، ٤)، (١، ٠)
م = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١}$	معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه
$\frac{٤}{٣}$ = $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ١}$	بالتعويض عن م = $\frac{٤}{٣}$
فيكون: ٤س − ٣ص − ٤ = ٠	المعادلة الكارتيزية
ل = $\frac{\lvert \text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ} \rvert}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$	صيغة قانون طول العمود

فيكون طول العمود المرسوم من النقطة أ (٦، −٢) إلى المستقيم : ٤س − ٣ص − ٤ = ٠

هو : ل = $\frac{\lvert ٤ \times ٦ - ٣ \times -٢ - ٤ \rvert}{\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}}$ = $\frac{\lvert ٢٤ + ٦ - ٤ \rvert}{\sqrt{٢٥}}$ = ٥ $\frac{١}{٥}$ وحدة طول

باعتبار $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدة للمثلث أ ب جـ

∵ ب جـ = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$	صيغة قانون البعد بين نقطتين
= $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٤ - ٠)^٢}$ = ٥ وحدات	بالتعويض بالنقطتين (٤، ٤)، (١، ٠)
مساحة سطح المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع	صيغة قانون مساحة المثلث
= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × $\frac{٢٦}{٥}$ = ١٣ وحدة مربعة	

حاول أن تحل

(٣) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠، −٣)، (٤، ٠)

تحقق من فهمك

(١) **طرق** طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة ٣ س − ٤ ص − ٧ = ٠ ومسار الطريق الثانى تمثله المعادلة ٣ س − ٤ ص + ١١ = ٠

أثبت أن الطريقين متوازيان، ثم أوجد أقصر بعد بينهما.

التقييم المستمر

إجابات تعبير شفهى

(٢) أ) طول العمود = $\frac{\lvert \text{جـ} \rvert}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$

ب) طول العمود = $\frac{\lvert \text{ص}_١ \rvert}{١}$ = $\lvert \text{ص}_١ \rvert$

جـ) طول العمود = $\frac{\lvert \text{س}_١ \rvert}{١}$ = $\lvert \text{س}_١ \rvert$

إجابات حاول أن تحل

(٣) معادلة الخط المستقيم: ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

طول العمود = ١

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك

$\text{م}_١$ = $\frac{٣}{٤}$ ، $\text{م}_٢$ = $\frac{٣}{٤}$ $\text{م}_١$ = $\text{م}_٢$ أى المستقيمان متوازيان

بوضع ص = ٠ فى معادلة المستقيم الأول س = $\frac{٧}{٣}$

نوجد طول العمود المرسوم من النقطة ($\frac{١}{٢}$، ٠)

إلى المستقيم: ٣س − ٤ ص + ١١ = ٠

طول العمود = $\frac{١٨}{٥}$ = ٣,٦

ملاحظات على تمارين فى كراسة الأنشطة:

(١١) باستخدام قانون التقسيم نوجد إحداثى ء وهى (٠، ٦)

ونوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$: ٤ س − ٣ ص + ١ = ٠

و طول العمود المرسوم من ء على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يساوى: $\frac{١٧}{٥}$

ونوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ فتكون ٥ وحدات طول

مساحة متوازى الأضلاع = ١٧ وحدة مساحة

(١٣) ك = ٢، ص = −٣

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$: ٢ س + ص − ٨ = ٠

طول $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ = ٢$\sqrt{٥}$ ، طول $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\sqrt{٥}$

طول العمود المرسوم من أ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (٢$\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٥}$) × $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

= ٤,٥ وحدة مساحة

التدريب والتقييم

(١) أوجد بعد النقطة (٧، −٢) عن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥، −١)، (٢، ٣) **[الإجابة: ١]**

(٢) إذا كان المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١، ١) + ك (١٢، ٥) يمس الدائرة التى مركزها (٤، −١) فأوجد طول نصف قطر الدائرة. **[الإجابة: ٣]**

(٣) أثبت أن النقاط: أ (٣، −١)، ب (−٥، ٢)، جـ (−٢، ٤)، ء (٦، ١) هى رؤوس متوازى اضلاع ثم أوجد مساحة سطحه

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين: أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص = ٤، س − ص = ٢ وطول العمود المرسوم إليه من نقطة الأصل يساوى وحدة طول واحدة

[للإجابة: ص − ١ = ٠، ٣ س − ٤ ص −٥ = ٠]

٤ - ٥

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

خلفية

سبق لك أن درست الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ وعلمت أن أ، ب لا يساويا الصفر معًا، وسوف ندرس فى هذا الدرس المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

مفردات أساسية

نقطة تقاطع مستقيمين

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من صفحة ١٠٠ إلى صفحة ١٠٢ كتاب الأنشطة والتدريبات صفحات ٤٧ - الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

إجراءات الدرس

التمهيد

- ذكر طلابك بحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى مجهولين، والتى سبق لهم دراستها فى المرحلة الإعدادية وذكرهم بأن حل المعادلة هو نقطة تقاطع المستقيمين فى مثال ص ٩٨.

- وضح للطلاب بأنه يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص - ٥ = ٠، ٢ س - ٣ ص + ٤ = ٠ ، فتكون هى (١، ٢)، وبذلك توجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين كالآتى:

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

---

٤ - ٥

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

General equation of the straight line passing through the point of intersection of two lines

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين



سبق أن درست كيفية إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع مستقيمين غير متوازيين
أ$_1$ س + ب$_1$ ص + جـ$_1$ = ٠، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + جـ$_2$ = ٠

فهل يمكنك إيجاد معادلة عدة مستقيمات تمر بنقطة تقاطع المستقيمين السابقين؟



المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومين

General equation of the straight line passing through the point of intersection of two given lines

∵ أى نقطة معلومة يمكن أن يمر بها عدد لانهائى من المستقيمات.

∴ المعادلة التى تمثل جميع المستقيمات المارة بنقطة تقاطع المستقيمين.

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + جـ$_1$ = صفر ، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + جـ$_2$ = صفر هى:

م (أ$_1$ س + ب$_1$ ص + جـ$_1$) + ل (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + جـ$_2$) = صفر ، م ∈ ع ، ل ∈ ح (١)

ففى حالة م = صفر تنتج معادلة المستقيم الثانى.

فى حالة ل = صفر تنتج معادلة المستقيم الأول.

أما فى حالة م ≠ صفر ، ل ≠ صفر فتنتج معادلة أى مستقيم يمر بنقطة التقاطع خلاف المستقيمين الأصليين، و يمكن فى هذه الحالة وضع المعادلة (١) على الصورة:

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + جـ$_1$ + ك (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + جـ$_2$) = صفر (٢)

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- نقطة تقاطع مستقيمين intersection point of two straight lines
- معادلة عامة General Equation

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

مثال

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (- ٢، ٤) وبنقطة تقاطع المستقيمين:
س + ٢ ص - ٥ = ٠ ، ٢ س - ٣ ص + ٤ = ٠

١٠٠ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

وبالتعويض تكون: $\frac{٢}{-٣} = \frac{ص - ٢}{س - ١}$ فتكون المعادلة هى:

٢ س + ٣ ص - ٨ = ٠

- ذكر طلابك بكيفية استخدام الآلة الحاسبة العلمية لحل المعادلتين و إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين.

عرض الدرس

التقييم المستمر:

إجابات حاول أن تحل:

(١) نقطة تقاطع المستقيمين (٠، ٣)

المعادلة العامة هى: س - ص - ٣ = ٠

مثال (٢): يمكن إيجاد المعادلة الكارتيزية للمعادلة المتجهة، ثم توجد نقطة تقاطع المستقيمين بحلهما جبريًّا.

التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل

(٢) م$_1$ = $\frac{١}{٤}$ ، م$_2$ = -٤ أى أن م$_1$ × م$_2$ = -١

وبالتالى فإن المستقيمين متعامدان

نقطة التقاطع هى (-٢، ٣)

معادلة المستقيم هى: س + ٢ ص - ٤ = ٠

التدريب والتقييم

إجابة تحقق من فهمك

1) ٢ س − ٣ ص + ٤ = ٠
2) $م_١ = -\frac{٣}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٢}{٣}$ ، $م_١ \times م_٢ = -١$ المستقيمان متعامدان
3) نقطة تقاطع المستقيمين هى (١، ٢)
4) س − ص + ١ = ٠
5) $\frac{٨}{٥}$
6) $\frac{١٣}{٣}$ سم²

تقييم النشاط

- اطلب إلى طلابك عمل النشاط الموضح صفحة (١٠٠) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	يوجد الطالب كل ما هو مطلوب منه ويحصله على إجابات صحيحة لكل الأسئلة المطروحة
جيد جدًّا ٨ درجات	يوجد الطالب كل ماهو مطلوب منه، ويحصل على إجابات صحيحة لمعظم الأسئلة المطروحة
جيد ٧ درجات	يوجد الطالب كل ما هو مطلوب منه ويحصل على إجابات صحيحة لكل الأسئلة ولكن بمساعدة طفيقة من المعلم
مقبول ٥ درجات	يوجد الطالب كل ما هو مطلوب منه، ويحصل على إجابات صحيحة لكل الأسئلة لكن بمساعدة كبيرة من المعلم
ضعيف أقل من ٥ درجات	لايستطيع الطالب إيجاد ما هو مطلوب منه ويحتاج للمساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

التقييم

1) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ٣س + ٢ ص = ٤، ٢ س + ٣ ص = ١ و يمر بالنقطة (١، −١)   [الإجابة هى = −١]
2) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين: س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، ٢ س − ص − ٤ = ٠ و يكون موازيًا للمستقيم: س − ٢ ص + ١ = ٠
[الإجابة: ٥ س − ١٠ ص + ١١ = ٠]

نشاط إثرائى للطلاب المتفوقين:

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين: ٥ س − ٣ ص = ٤، $\frac{٣}{٢}$ س + ص = ٥ وطول العمود المرسوم إليه من النقطة (٦، −٥) يساوى وحدة طول واحدة.
[الإجابة: ٤ س + ٣ ص = ١٤، ١٢ س + ٥ ص = ٣٤]

الحل

$أ_١$ س + $ب_١$ ص + جـ + ك ($أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + جـ) = ٠	المعادلة العامة
س + ٢ ص − ٥ + ك (٢ س − ٣ ص + ٤) = ٠	بالتعويض عن معادلة المستقيمين
−٢ + ٢ × ٤ − ٥ + ك (٢× −٢ − ٣×٤ + ٤) = ٠	بالتعويض عن س = −٢ ، ص = ٤
١ − ١٢ك = ٠ أى ك = $\frac{١}{١٢}$	بالتبسيط
س + ٢ ص − ٥ + $\frac{١}{١٢}$(٢ س − ٣ ص + ٤) = ٠	بالتعويض عن قيمة ك
١٢ س + ٢٤ ص − ٦٠ + ٢ س − ٣ ص + ٤ = ٠	بضرب طرفى المعادلة فى ١٢
١٤ س + ٢١ ص − ٥٦ = ٠	بالتبسيط
٢ س + ٣ ص − ٨ = ٠	بقسمة طرفى المعادلة ÷ ٧

حاول أن تحل

1) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٢، −١) وبنقطة تقاطع المستقيمين: ٧س + ص + ٣ = ٠ ، ٥ س − ص − ٣ = ٠

مثال

3) أثبت أن المستقيمين ٢س − ٣ص + ٤ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (١، ٢) + ك (−٢، ٣) متقاطعان على التعامد، ثم أوجد: نقطة تقاطعهما.

الحل

$م_١ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{-٢} = -\frac{٣}{٢}$	ميل المستقيمين.
∴ $م_١ \times م_٢ = \frac{٢}{٣} \times -\frac{٣}{٢} = -١$	شرط تعامد مستقيمين.

∵ $م_١ \times م_٢ = ١$

∴ المستقيمان متقاطعان على التعامد.

أ) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين، نوجد المعادلة الكارتيزية للمعادلة الثانية.

∵ (س، ص) = (١، ٢) + ك (−٢، ٣)

∴ $\frac{س - ١}{-٢} = \frac{ص - ٢}{٣}$	بحذف الثابت ك.
٣س − ٣ = −٢ص + ٤	حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسيطين.
٣س + ٢ص − ٧ = ٠	بالتبسيط
٢س − ٣ص + ٤ = ٠، ٣س + ٢ص − ٧ = ٠	بحل المعادلتين

∴ س = ١ ، ص = ٢

وتكون نقطة تقاطع المستقيمين المتعامدين هى (١، ٢)

حاول أن تحل

2) أثبت أن المستقيمين س − ٤ص + ١٤ = ٠ ، ٤س + ص + ٥ = ٠ متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٢، ١).

تحقق من فهمك

إذا كان $ل_١$: ٣س + ٢ص − ٧ = ٠، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢، ٠) + ك (٣، ٢).

فأوجد:

1) المعادلة الكارتيزية للمستقيم $ل_٢$
2) قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_١$، $ل_٢$
3) نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$، $ل_٢$.
4) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين والنقطة (٣، ٤)
5) طول العمود المرسوم من نقطة تقاطع المستقيمين إلى الخط المستقيم الذى معادلته ٣س − ٤ص −٩ = ٠
6) مساحة سطح المثلث المحدد بالمستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ ومحور السينات.

نشاط

يبين الشكل المقابل شبكة تربيعية مقسمة بالميل البحرى، مبين عليها إحداثيات كل من: الميناء أ (٤، ٥) والجزيرة ب (−٦، ٣) والسفينة جـ (−٢، −٣).

ميناء أ
جزيرة ب
سفينة جـ

أوجد:

1) المسافة بالميل البحرى بين الميناء والسفينة.
2) الزمن الذى استغرقته السفينة فى قطع المسافة $\overline{أب}$ إذا كانت سرعتها ٢٠ عقدة.
3) النسبة التى تنقسم بها $\overline{ب جـ}$ بمحور السينات، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.
4) معادلة مسار السفينة إذا كانت تتحرك فى خط مستقيم.
5) أقصر مسافة بين الجزيرة والسفينة.
6) قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$
7) مساحة سطح المثلث أ ب جـ

أضف إلى معلوماتك

العقدة هى وحدة قياس سرعة السفن في البحر، وهى تساوى ميل بحرى لكل ساعة. والميل البحرى يساوى ١٨٥٢ مترًا علمًا بأن الميل البرى يساوى ١٦٠٠ مترا.

تكنولوجيا:

8) استعن بالشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).
أ) ابحث عن الخدمات التى تقدمها الهيئة المصرية لسلامة الملاحة البحرية للموانئ والسفن البحرية. هل تفضل العمل فى الملاحة البحرية؟ لماذا؟
ب) حدد أهم الموانئ البحرية بجمهورية مصر العربية، وحدد مواقعها.

الوحدة الخامسة

حساب المثلثات

Trigonometry



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية .
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية .
- يحل معادلات مثلثية بسيطة في الصورة العامة في الفترة [٠، ٢π]
- يتعرف الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف القطاع الدائرى وكيفية إيجاد مساحته.
- يتعرف القطعة الدائرية وكيفية إيجاد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يحل مسائل متنوعة على حساب المثلثات.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى

المصطلحات الأساسية

متطابقة مثلثية	Trigonometric identitie	زاوية انخفاض	Angle of depression
معادلة مثلثية	Trigonometric equation	قطاع دائرى	Circular sector
زاوية ارتفاع	Angle of elevation	قطعة دائرية	Circular Segment

مقدمة الوحدة

سبق أن درس الطالب الزاوية الموجهة ووحدات قياسها بالتقديرين الستينى والدائرى ثم درس الدوال المثلثية للزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى، والتمثيل البياني لدالتى الجيب وجيب التمام، وسوف يدرس فى هذه الوحدة المتطابقات والمعادلات المثلثية، وحل المثلث القائم الزاوية وتطبيقات عليه، ثم مساحة كل من القطاع والقطعة الدائرية والأشكال الهندسية .

وتتضمن هذه الوحدة سبعة دروس بيانها كالآتى:

الدرس الأول: المتطابقات المثلثية.

الدرس الثانى: حل المعادلات المثلثية.

الدرس الثالث: حل المثلث القائم الزاوية.

الدرس الرابع: زوايا الارتفاع، وزوايا الانخفاض.

الدرس الخامس: القطاع الدائرى.

الدرس السادس: القطعة الدائرية.

الدرس السابع: المساحات

أهداف الوحدة

فى نهاية هذا الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة .
- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية .
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية .
- يحل معادلات مثلثية بسيطة فى الفترة [٠، ٢π] فى الصورة العامة.
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:

دروس الوحدة

الدرس (٥ – ١): المتطابقات المثلثية.

الدرس (٥ – ٢): حل المعادلات المثلثية.

الدرس (٥ – ٣): حل المثلث القائم الزاوية.

الدرس (٥ – ٤): تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.

الدرس (٥ – ٥): القطاع الدائرى.

الدرس (٥ – ٦): القطعة الدائرية.

الدرس (٥ – ٧): مساحة المثلث، مساحة الشكل الرباعى، مساحة المضلع المنتظم.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى متصل بالانترنت – برامج رسومية

نبذه تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، وهذا فرع كما هو واضح من اسمه يتعلق بالحسابات الخاصة بالمثلث من حيث زواياه وأضلاعه. ويذكر بعض المؤرخين أن الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تعرض لحساب المثلثات،عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول ظل عصا رأسية وطول ظله فى نفس الوقت.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى فى القرن العاشر الميلادى. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكُرَىّ أو الكروى (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات الهامة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا فى العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المناحى العلمية والعملية. وساهم ذلك فى دفع عجلة التقدم والحضارة.

مخطط تنظيمي للوحدة

حساب المثلثات
المتطابقات المثلثية
المعادلات المثلثية
حل المعادلة فى فترة
الحل العام للمعادلة
حل المثلث القائم الزاوية
بمعلومية ضلع وزاوية
بمعلومية ضلعين
زاويا الارتفاع
زاويا الانخفاض
تطبيقات حياتية
استخدام التكنولوجيا
المساحة
القطاع الدائرى
القطعة الدائرية
المثلث
الشكل الرباعى
المضلع المنتظم

جا أس = جتا ب س

ظا أس = ظتا ب س   قا أس = قتا ب س

- يتعرف الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف القطاع الدائرى وكيفية إيجاد مساحته.
- يتعرف القطعة الدائرية وكيفية إيجاد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث، ومساحة الشكل الرباعى، مساحة المضلع المنتظم.
- يحل مسائل متنوعة على حساب المثلثات.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى.

زمن تدريس الوحدة

١٢ ساعة

الوسائل التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية – آلة حاسبة رسومية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسومية.

طرق التدريس المقترحة

المحاضرة – المناقشة – الطريقة الاستدلالية – العصف الذهنى– التعلم التعاونى.

مهارات التفكير التي تنميها الوحدة

التفكير الناقد – التفكير التحليلى – حل المشكلات – التفكير المنطقى.

طرق التقييم المقترحة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس وكذلك الأسئلة المتضمنة فى التمارين العامة على الوحدة، واختبار الوحدة، والاختبار التراكمى.



٥ - ١
المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

سوف تتعلم
- مفهوم المتطابقة المثلثية .
- تبسيط المقادير المثلثية.
- إثبات صحة متطابقة مثلثية .

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- معادلة Equation
- متطابقة Identity

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية
Basic Relations Among Trigonometric Functions

فكر و ناقش

سبق أن درست فى الفصل الداسى الأول بعض خواص الدوال المثلثية ورسومها البيانية، وفى هذه الوحدة سوف تستخدم المتطابقات المثلثية؛ وذلك لتبسيط المقادير وحل المعادلات المثلثية.

وسبق أن درست دائرة الوحدة وعلمت أن ∠ أ و ب الموجهة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى $\overleftrightarrow{و ب}$ يقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب(س، ص) حيث ق(∠ أ و ب) = θ، ب(جتاθ، جاθ) فهل يمكنك استنتاج بعض العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية؟

تعلم المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

المتطابقة: هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعْرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلا: جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = جتا θ متطابقة صحيحة لجميع قيم θ الحقيقية.

المعادلة: هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقية التى تحقق هذه المتساوية وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا: جا$\theta = \frac{١}{٢}$ ، $\theta \in [٠، ٢\pi]$

نجد أن: قيم θ التى تحقق هذه المعادلة والتى تنتمى إلى الفترة $[٠، ٢\pi]$ هى $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٦}$ فقط.

حاول أن تحل

(١) أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة وأيها تمثل متطابقة.

أ) جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب) ظا $(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)$ = − ظتا θ

ج) ظتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ د) جا $(\pi - \theta)$ = جا θ

١٠٦ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

٥ - ١
المتطابقات المثلثية
Trigonometric identities

خلفية
سبق للطالب أن درس الدوال المثلثية الأساسية ومقلوبات هذه الدوال والرسوم البيانية لدالتى الجيب وجيب التمام، وفى هذا الدرس سوف يدرس المتطابقات المثلثية بغرض تبسيط المقادير وذلك بالاستعانة بالمتطابقات الأساسية وكذلك لحل المعادلات المثلثية.

أهداف الدرس
فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يستنتج المتطابقات المثلثية الأساسية.
- يبسط المقادير المثلثية.
- يثبت صحة متطابقة مثلثية.

مفردات أساسية
متطابقة - متساوية - معادلة.

المواد التعليمية المستخدمة
آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية - حاسب آلى - برامج رسومية

طرق التدريس المقترحة
العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى.

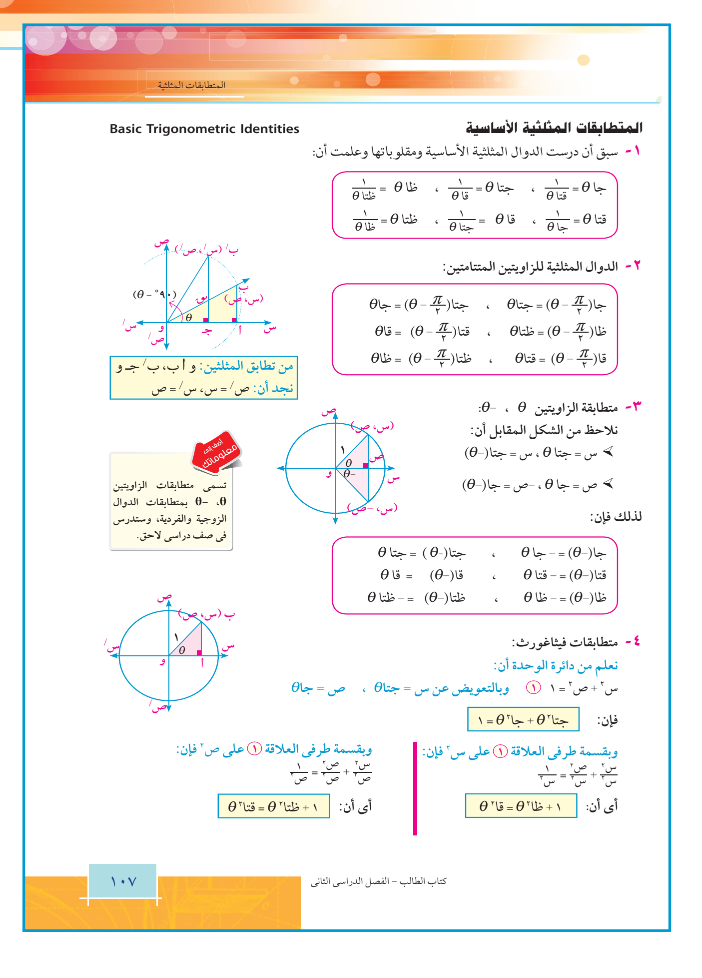
مكان التدريس
الفصل الدراسى - معمل الحاسب الآلى.

مصادر التعلم
الكتاب المدرسى من صفحة ١٠٦ إلى صفحة ١١٠
كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٥٢
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش
راجع مع طلابك الدوال المثلثية الأساسية ومقلوبات هذه الدوال والعلاقة بين كل دالة مثلثية أساسية ومقلوب هذه الدالة.



تعلم: المتطابقات والمعادلات المثلثية

وضح لطلابك تعريف كل من المتطابقة المثلثية والمعادلة المثلثية مع إعطاء أمثلة توضح الفرق بينهما.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

① أ معادلة مثلثية.
ب متطابقة مثلثية.
جـ معادلة مثلثية.
د متطابقة مثلثية.

اطلب إلى طلابك إعطاء بعض الأمثلة التى توضح الفرق بين كل من المعادلة المثلثية والمتطابقة المثلثية مع مناقشة الأمثلة المقدمة منهم وتصحيح ما يرد بها من أخطاء فردية فى حينها.

إرشادات

- وضح لطلابك أن:
  جا θ × جتا θ = ١،
  جتا θ × قا θ = ١
  ظا θ × ظتا θ = ١ وهكذا .....
- أى أن:
  الدالة المثلثية × مقلوب هذه الدالة = ١
- ذكر طلابك بالنسبة المثلثية للزوايا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$، $(\frac{٣\pi}{٢} \pm \theta)$ التى سبق دراستها فى الفصل الدراسى الأول.

للطلاب المتفوقين

- يمكنك أن توضح للطلاب الفائقين أن جتا$(-\theta)$ = جتا θ وتكون الدالة زوجية حيث يكون الشكل البيانى الممثل لهذه الدالة متماثلًا حول محور الصادات، أما إذا كان جا$(-\theta)$ = –جا θ فإن الدالة تكون فردية و يكون منحناها متماثلًا حول نقطة الأصل.
- وضح للطلاب بأن المتطابقة $جا^٢\theta + جتا^٢\theta = ١$ يمكن كتابتها على الصورة الآتية:
  $جا^٢\theta = ١ - جتا^٢\theta$، $جتا^٢\theta = ١ - جا^٢\theta$
- بالمثل فى المتطابقة : $١ + ظا^٢\theta = قا^٢\theta$ يمكن كتابتها على الصورة التالية:
  $قا^٢\theta - ظا^٢\theta = ١$، $ظا^٢\theta - قا^٢\theta = -١$

- المقصود بتبسيط المقادير المثلثية وضعها فى أبسط صورة وذلك باستخدام طرق التحليل والاختصار والدمج والإبدال والتجميع وغيرها من الخواص بالإضافة إلى استخدام المتطابقات الأساسية
- إذا تعذرت عمليات التبسيط السابقة يمكنك تحويل المتطابقة بدلالة جا θ، جتا θ ثم الاختصار والتبسيط.
- للتحقق من تبسيط المقادير المثلثية يمكن رسمها بيانيًّا مستخدمًا أحد البرامج الرسومية وذلك للتأكد من صحة إجابتك.

إجابات حاول أن تحل:

(٢) **أ** المقدار = قا$^{٢}\theta$ – ظا$^{٢}\theta$ = ١

ب المقدار = جا θ × قتا θ = $\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ = ١

ج المقدار = $\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ = ١

تعلم المتطابقات المثلثية

ناقش مع طلابك ما ورد فى بداية صفحة (١٠٤) من كتاب الطالب ليتعرف مفهوم المتطابقة المثلثية.

حل آخر فى مثال (٣):

الطرف الأيمن = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta} \times \dfrac{١ + \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$

= $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta\,(١ + \text{جا}\,\theta)}{١ - \text{جا}^{٢}\theta}$ = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta\,(١ + \text{جا}\,\theta)}{\text{جتا}^{٢}\theta}$

= ١ + جا θ

ويمكن أن تبدأ من الطرف الأيسر كالآتى:

الطرف الأيسر = (١ + جا θ) × $\dfrac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$

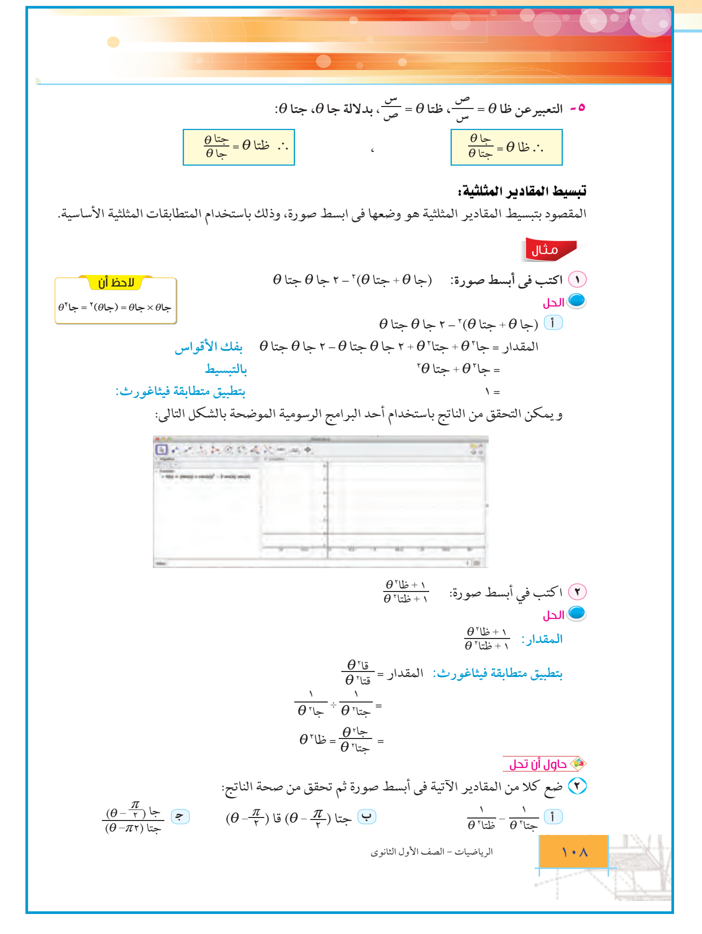
= $\dfrac{١ - \text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$ = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$

التقيم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٦):

(٣) الطرف الأيمن = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta \times \text{جا}^{٢}\theta}{\dfrac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}} \times \dfrac{\text{جتا}^{٤}\theta \times \text{جا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$

= جتا$^{٤}\theta$



٥- التعبير عن ظا θ = $\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$، ظتا θ = $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}$، بدلالة جا θ، جتا θ:

∴ ظا θ = $\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، ∴ ظتا θ = $\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

تبسيط المقادير المثلثية:

المقصود بتبسيط المقادير المثلثية هو وضعها فى ابسط صورة، وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية.

مثال

(١) اكتب فى أبسط صورة: (جا θ + جتا θ)^{٢} – ٢ جا θ جتا θ

الحل

أ (جا θ + جتا θ)^{٢} – ٢ جا θ جتا θ

المقدار = جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ + ٢ جا θ جتا θ – ٢ جا θ جتا θ — بفك الأقواس

= جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ — بالتبسيط

= ١ — بتطبيق متطابقة فيثاغورث:

لاحظ أن: جاθ × جاθ = (جاθ)^{٢} = جا$^{٢}\theta$

ويمكن التحقق من الناتج باستخدام أحد البرامج الرسومية الموضحة بالشكل التالى:

(٢) اكتب في أبسط صورة: $\dfrac{١ + \text{ظا}^{٢}\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\theta}$

الحل

المقدار: $\dfrac{١ + \text{ظا}^{٢}\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\theta}$

بتطبيق متطابقة فيثاغورث: المقدار = $\dfrac{\text{قا}^{٢}\theta}{\text{قتا}^{٢}\theta}$

= $\dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta} \div \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$

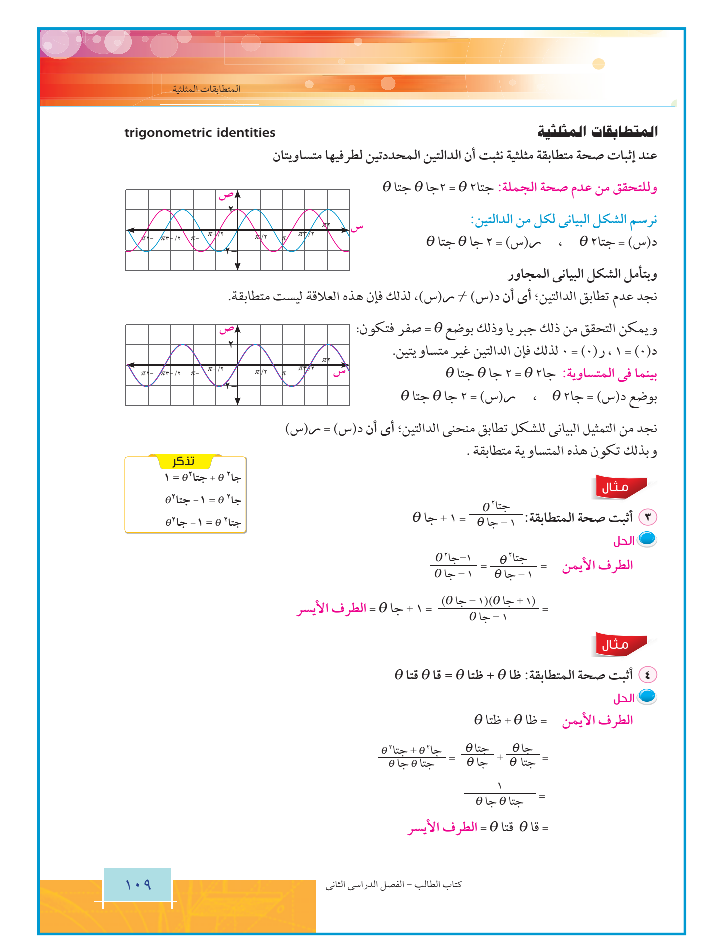
= $\dfrac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ = ظا$^{٢}\theta$

حاول أن تحل

(٢) ضع كلا من المقادير الآتية فى أبسط صورة ثم تحقق من صحة الناتج:

أ $\dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta} - \dfrac{١}{\text{ظتا}^{٢}\theta}$ ب جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ قا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ ج $\dfrac{\text{جا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{جتا}\,(٢\pi - \theta)}$

١٠٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى



المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية trigonometric identities

عند إثبات صحة متطابقة مثلثية نثبت أن الدالتين المحددتين لطرفيها متساويتان

وللتحقق من عدم صحة الجملة: جتا٢ θ = ٢جا θ جتا θ

نرسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

د(س) = جتا٢ θ ، ر(س) = ٢ جا θ جتا θ

وبتأمل الشكل البيانى المجاور

نجد عدم تطابق الدالتين؛ أى أن د(س) ≠ ر(س)، لذلك فإن هذه العلاقة ليست متطابقة.

ويمكن التحقق من ذلك جبريا وذلك بوضع θ = صفر فتكون:

د(٠) = ١ ، ر(٠) = ٠ لذلك فإن الدالتين غير متساويتين.

بينما فى المتساوية: جا٢ θ = ٢ جا θ جتا θ

بوضع د(س) = جا٢ θ ، ر(س) = ٢ جا θ جتا θ

نجد من التمثيل البيانى للشكل تطابق منحنى الدالتين؛ أى أن د(س) = ر(س)

وبذلك تكون هذه المتساوية متطابقة.

تذكر

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

جا$^{٢}\theta$ = ١ – جتا$^{٢}\theta$

جتا$^{٢}\theta$ = ١ – جا$^{٢}\theta$

مثال

(٣) أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$ = ١ + جا θ

الحل

الطرف الأيمن = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$ = $\dfrac{١ - \text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جا}\,\theta}$

= $\dfrac{(١ + \text{جا}\,\theta)(١ - \text{جا}\,\theta)}{١ - \text{جا}\,\theta}$ = ١ + جا θ = الطرف الأيسر

مثال

(٤) أثبت صحة المتطابقة: ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

الحل

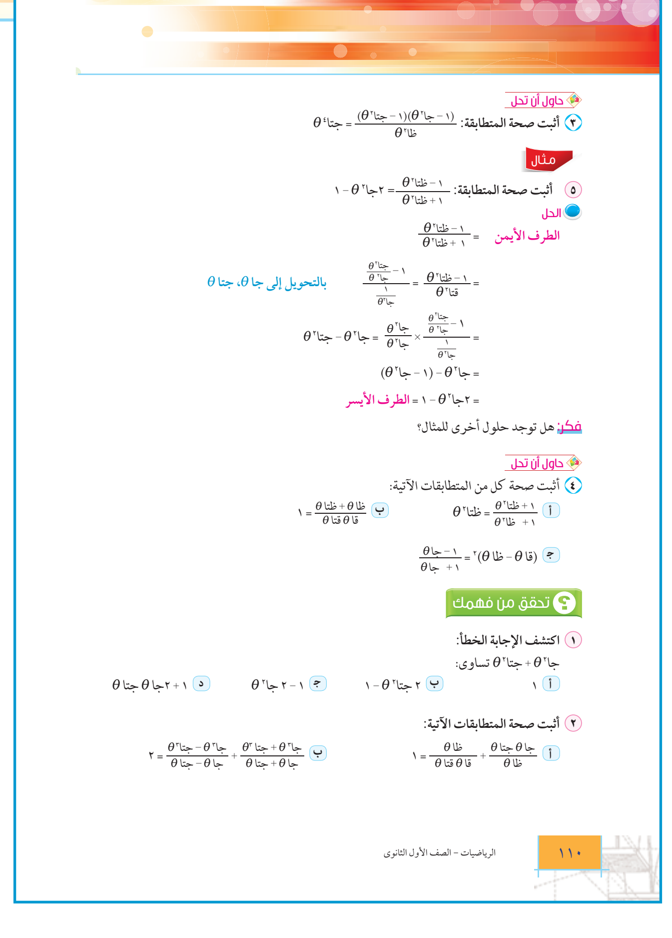
الطرف الأيمن = ظا θ + ظتا θ

= $\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ = $\dfrac{\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta}$

= $\dfrac{١}{\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta}$

= قا θ قتا θ = الطرف الأيسر

١٠٩ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى


حاول أن تحل

٣ أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(١ - \text{جا}^٢\theta)(١ - \text{جتا}^٢\theta)}{\text{ظا}^٢\theta} = \text{جتا}^٤\theta$

مثال

٥ أثبت صحة المتطابقة: $\frac{١ - \text{ظتا}^٢\theta}{١ + \text{ظتا}^٢\theta} = ٢\text{جا}^٢\theta - ١$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١ - \text{ظتا}^٢\theta}{١ + \text{ظتا}^٢\theta}$

$= \frac{١ - \text{ظتا}^٢\theta}{\text{قتا}^٢\theta} = \frac{١ - \frac{\text{جتا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta}}{\frac{١}{\text{جا}^٢\theta}}$ بالتحويل إلى جا θ، جتا θ

$= \frac{١ - \frac{\text{جتا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta}}{\frac{١}{\text{جا}^٢\theta}} \times \frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta} = \text{جا}^٢\theta - \text{جتا}^٢\theta$

$= \text{جا}^٢\theta - (١ - \text{جا}^٢\theta)$

$= ٢\text{جا}^٢\theta - ١ =$ الطرف الأيسر

فكر: هل توجد حلول أخرى للمثال؟

حاول أن تحل

٤ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ $\frac{١ + \text{ظتا}^٢\theta}{١ + \text{ظا}^٢\theta} = \text{ظتا}^٢\theta$ ب $\frac{\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta} = ١$

ج $(\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta)^٢ = \frac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$

تحقق من فهمك

١ اكتشف الإجابة الخطأ:

$\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta$ تساوي:

أ ١ ب $٢\text{جتا}^٢\theta - ١$ ج $١ - ٢\text{جا}^٢\theta$ د $١ + ٢\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta$

٢ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ $\frac{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta} + \frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta} = ١$ ب $\frac{\text{جا}^٣\theta + \text{جتا}^٣\theta}{\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جا}^٣\theta - \text{جتا}^٣\theta}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta} = ٢$

١١٠ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

ذكر طلابك عند إثبات صحة متطابقة بأن يبدأ بالطرف الأكبر لتبسيطه إلى الطرف الأصغر.

حل آخر لمثال (٥)

الطرف الأيمن $= \frac{١ - (\text{قتا}^٢\theta - ١)}{\text{قتا}^٢\theta} \times \frac{٢ - \text{قتا}^٢\theta}{\text{قتا}^٢\theta}$

$= \frac{٢ - \frac{١}{\text{جا}^٢\theta}}{\frac{١}{\text{جا}^٢\theta}} = \frac{٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١}{١}$

التقيم المستمر

إجابات حاول أن تحل صفحة (١٠٨):

٤ أ الطرف الأيمن $= \frac{\text{قتا}^٢\theta}{\text{قا}^٢\theta} = \frac{\text{جتا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta} = \text{ظتا}^٢\theta$

= الطرف الأيسر

ب الطرف الأيمن $= \frac{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}}{\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \times \frac{١}{\text{جا}\,\theta}}$

$= \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$

ج الطرف الأيمن $= (\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} - \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta})^٢ = \frac{(١ - \text{جا}\,\theta)^٢}{١ - \text{جا}^٢\theta}$

$= \frac{(١ - \text{جا}\,\theta)^٢}{(١ - \text{جا}\,\theta)(١ + \text{جا}\,\theta)} = \frac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

١ ب، جـ، د

٢ أ الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}} + \frac{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}}{\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \times \frac{١}{\text{جا}\,\theta}}$

$= \text{جتا}^٢\theta + \text{جا}^٢\theta = ١$

ب $\frac{(\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta)(\text{جا}^٢\theta - \text{جتا}^٢\theta + \text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta)}{\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta}$

$+ \frac{(\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)(\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta + \text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta)}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta}$

$= ١ - \text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta + ١ + \text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta$

= ٢ = الطرف الأيسر.

التقييم

ضع كلا من المقادير الآتية فى أبسط صورة:

١ أ $\text{جتا}\,\theta \times \text{قا}\,\theta$

ب $١ + \text{ظتا}^٢(٩٠ - \theta)$

ج $\text{جا}^٢\theta + \text{ظا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta$

د $\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta\ (\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)$

هـ $\text{جتا}^٢(٢\pi - \theta) + \text{جتا}^٢(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

٢ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ $\text{جا}^٢\theta + \text{جا}^٢\theta\ \text{ظا}^٢\theta = \text{ظا}^٢\theta$

ب $\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta\ \text{ظا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

ج $\text{قا}^٢\theta + \text{قتا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta\ \text{قتا}^٢\theta$

نشاط إضافى للطلاب الفائقين:

ضع المقدار الآتى فى أبسط صورة:

$\text{جا}\,(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)\ \text{قا}\,(٢\pi - \theta)$



حل المعادلات المثلثية ٥ - ٢

Solving Trigonometric Equations

حل معادلة مثلثية بحلول حقيقية

فكر و ناقش

سبق أن درسنا حل المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والدرجة الثانية (جبريا وبيانيًّا)، وفى هذا الدرس سوف نحل المعادلات المثلثية وذلك بالاستعانة بالمتطابقات الأساسية، فهل يوجد تشابه بين حل المعادلات الجبرية وحل المعادلات المثلثية؟

عمل تعاونى

اشترك مع أحد زملائك فى رسم الدالة المثلثية ص = جتا θ والدالة ص = $\frac{١}{٢}$ ولاحظ نقط تقاطعهما المشتركة

١- ارسم منحنى الدالة ص$_١$ = جتاθ، ص$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ ولاحظ نقاط تقاطعهما المشتركة.

٢- كم حلًّا للمعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ في [٠، ٢π[؟

٣- هل توجد حلولًا أخرى للمعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ في الشكل البيانى؟

الشكل البيانى التالى يمثل حل المعادلة جتاθ = $\frac{١}{٢}$ حيث نجد أن المعادلة لها حلان هما $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٥\pi}{٣}$ عندما θ ∋[٠، ٢π[، وبإضافة ٢π أو −٢ π نحصل على حلول أخرى للمعادلة.

الحل العام للمعادلات المثلثية

General solution of the trigonometric equations

مثال

① أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

أ) جا θ = $\frac{١}{٢}$ ب) جتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ج) ظا θ = $\sqrt{٣}$

سوف تتعلم

- إيجاد الحل العام للمعادلات المثلثية
- حل المعادلات فى الفترة [٠، ٢π[

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلة مثلثية Trigonometric equation
- حل عام General solution

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- آلة حاسبة رسومية

١١١ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى

٥ - ٢

حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

خلفية

يشبه حل المعادلات المثلثية حل المعادلات الجبرية من حيث أن لها مجموعة تعويض ومجموعة حل، ويتوقف عدد حلول المعادلة المثلثية حسب الفترة المعطاة فى مجموعة التعويض، أما إذا كانت مجموعة التعويض هى ح، فيوجد للمعادلة المثلثية عدد لانهائى من الحلول وهذا ما يتضمنه هذا الدرس.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد الحل العام للمعادلات المثلثة.
- يوجد الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة: جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β
- يحل المعادلة المثلثية فى فترة معطاة.

مفردات أساسية

معادلة مثلثية – حل عام

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية – آلة حاسبة رسومية – حاسب آلى – برامج رسومية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى – معامل الحاسب الآلى.

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ١١١ إلى صفحة ١١٣

كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٥٣

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

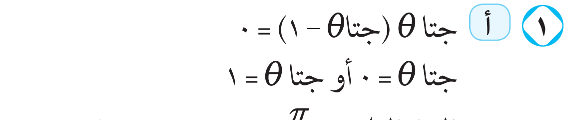
التمهيد

عمل تعاوني

- فى العمل التعاونى يمكنك إعطاء أمثلة أخرى تتطلب إيجاد حل المعادلات المثلثية باستخدام رسم المنحنيات ويمكنك إعطاء أمثلة أخرى كالآتى: جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ثم تطلب إلى الطلاب إيجاد الحل فى فترات محددة.



إجابات حاول أن تحل صفحة (١١٠):



(١) أ) θ جتا (جتا $\theta - 1) = 0$

جتا $\theta = 0$ أو جتا $\theta = 1$

الحل العام هو $\frac{\pi}{2} + $ ن π، ٢ن π حيث ن ∈ ص.

ب) ٢جا^2 θ − جا $\theta = 0$

جا θ (٢جا $\theta - 1) = 0$

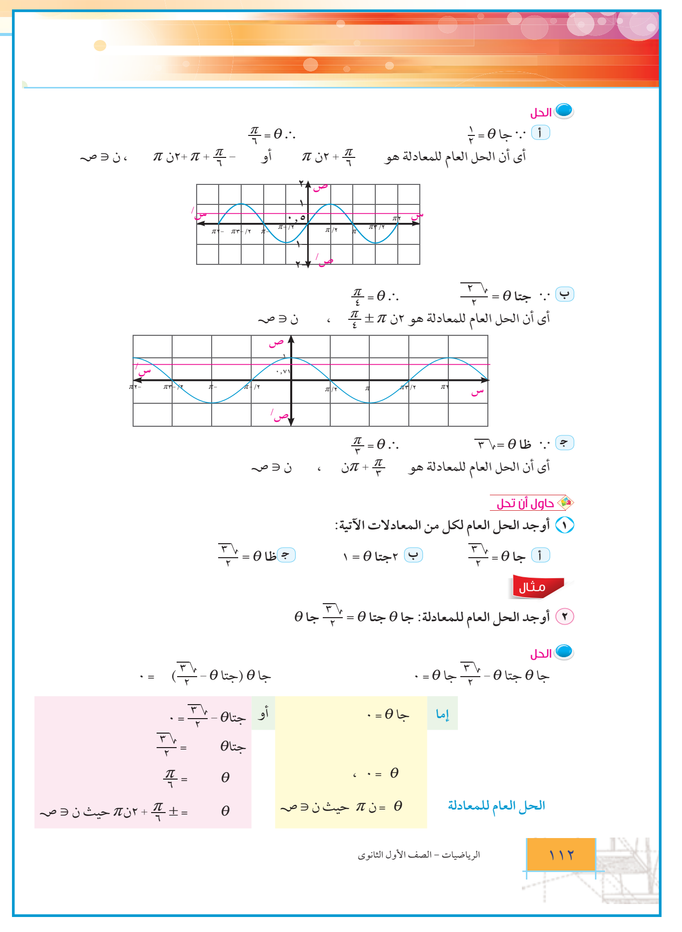
أما جا $\theta = 0$ ، جا $\theta = \frac{1}{2}$

الحل العام هو: ن π ، $\frac{\pi}{6} + $ ٢ن π، $\frac{5\pi}{6} + $ ٢ن π

ج) جا θ ($\sqrt{2}$ جتا $\theta - 1) = 0$

أما جا $\theta = 0$ ، جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل العام هو: ن π ، $\frac{\pi}{4} + $ ٢ن π، $\frac{7\pi}{8} + $ ٢ن π



الحل

أ) ∵ جا $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{6}$

أى أن الحل العام للمعادلة هو $\frac{\pi}{6} + $ ٢ن π أو $-\frac{\pi}{6} + \pi + $ ٢ن π ، ن ∈ ص

ب) ∵ جتا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$

أى أن الحل العام للمعادلة هو ٢ن $\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ، ن ∈ ص

ج) ∵ ظا $\theta = \sqrt{3}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{3}$

أى أن الحل العام للمعادلة هو $\frac{\pi}{3} + $ ن π ، ن ∈ ص

حاول أن تحل

(١) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ) جا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) ٢جتا $\theta = 1$ ج) ظا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال

(٢) أوجد الحل العام للمعادلة: جا θ جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

الحل

جا θ جتا $\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا $\theta = 0$ جا θ (جتا $\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

	إما		أو
	جا $\theta = 0$		جتا $\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
			جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\theta = 0$ ،		$\theta = \frac{\pi}{6}$
الحل العام للمعادلة	$\theta = $ ن π حيث ن ∈ ص		$\theta = \pm\frac{\pi}{6} + $ ٢ن π حيث ن ∈ ص

١١٢ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

تعلم الحل العام للمعادلات المثلثية

فى مثال (١) لاحظ أنه من الأخطاء الشائعة للطلاب تبسيط المعادلة وذلك بالقسمة على متغير، ففى المعادلة:

جا θ جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ لا يجوز القسمة على جا θ لأنها قد تساوى الصفر فمثلًا جا $\theta = 0$ لها قيم متعددة عندما $\theta = $ ن π، حيث ن ∈ ص. والشكل البيانى للدالة يوضح ذلك.

التقييم المستمر

إجابة تفكير ناقد:

وضح للطلاب بأن المعادلات المثلثية مثلها مثل المعادلات الجبرية قد يكون لها حلول حقيقية وقد لا يكون لها حلول حقيقية، ومن أمثلة المعادلات المثلثية التى ليس لها حلول حقيقية: جا $\theta = \frac{3}{2}$ ، قا $\theta = \frac{1}{2}$

تعلم: الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة

(جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β)

تجنب الخطأ

- وضح لطلابك فى بند فكر وناقش أنه لإيجاد قيم زاوية • فى المعادلة: جا θ = جتا ١٥° فإن:

  $\theta + 15° = 90°$ أي أن $\theta = 75°$

  أو $\theta - 15° = 90°$ أى أن $\theta = 105°$

- أما إذا كانت θ ∈ ح فإن الحل العام هو:

  ٧٥° + ٣٦٠° ن أو ١٠٥° + ٣٦٠° ن

  أى أنه يوجد عدد لا نهائى من الحلول فى ح.

إرشادات

وضح للطلاب إنه عند إيجاد الحل العام لدوال القاطع وقاطع التمام والظل وظل التمام، تأكد من الحلول التى تكون الدالة عندها غير معرفة.

وضح لطلابك أنه يمكن استخدام أحد البرامج الرسومية لحل المعادلة ومطابقتها مع الحل للتأكد من صحته.

وضح لطلابك أن حل المعادلة ظا α = ظتا β، يختلف عن حل المعادلتين جا α = جتا β، قا α = قتا β مع التأكيد على شروط الحل.

إجابات حاول أن تحل

(١) أ $\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن$ أو $-\frac{\pi}{٣} + \pi + ٣٢\pi$ ، ن ∈ ص

ب $٢\pi ن \pm \frac{\pi}{٣}$ ، ن ∈ ص

جـ $\frac{\pi}{٦} + \pi ن$ ، ن ∈ ص

(٢) أ جتا θ (٢جا θ + ٣) = ٠

إما : جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠°، ٢٧٠°

٢ جا θ = −٣

جا $\theta = -\frac{٣}{٢}$

لا توجد حلول حقيقية تحقق المعادلة

∴ مجموعة حل المعادلة هو {٩٠°، ٢٧٠°}

ب جا θ (٤ جا θ − ٣جتا θ) = ٠

جا θ = ٠ أي θ = ٠ ، ١٨٠

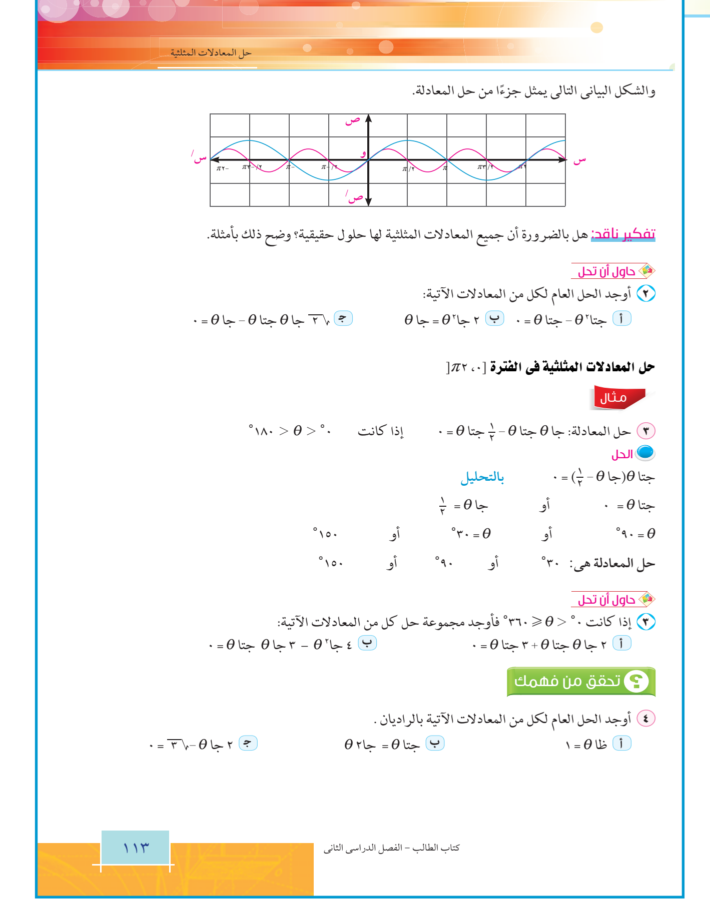
أو : ٤ جا θ = ٣ جتا θ

$\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{٣}{٤}$ ∴ ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$

θ = ٣٦° ٥٢َ ١٢ً ، θ = ٢١٦° ٥٢َ ١٢ً

مجموعة الحل هي:

{٠، ١٨٠، ٣٦° ٥٢َ ١٢ً، ٢١٦° ٥٢َ ١٢ً}



والشكل البيانى التالى يمثل جزءًا من حل المعادلة.

تفكير ناقد: هل بالضرورة أن جميع المعادلات المثلثية لها حلول حقيقية؟ وضح ذلك بأمثلة.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ جتا² θ − جتا θ = ٠ ب ٢ جا² θ = جا θ جـ $\sqrt{٢}$ جا θ جتا θ − جا θ = ٠

حل المعادلات المثلثية فى الفترة [٠، ٢π]

مثال

(٣) حل المعادلة: جا θ جتا θ − $\frac{١}{٢}$ جتا θ = ٠ إذا كانت ٠° < θ < ١٨٠°

الحل

جتا θ(جا θ − $\frac{١}{٢}$) = ٠ بالتحليل

جتا θ = ٠ أو جا θ = $\frac{١}{٢}$

θ = ٩٠° أو θ = ٣٠° أو ١٥٠°

حل المعادلة هى: ٣٠° أو ٩٠° أو ١٥٠°

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت ٠° < θ ⩽ ٣٦٠° فأوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ ب ٤ جا² θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

تحقق من فهمك

(٤) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية بالراديان .

أ ظا θ = ١ ب جتا θ = جا٢ θ جـ ٢ جا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

أ $\frac{\pi}{٤} + ٢ن\,\pi$

ب ٢ $\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ ، ن ∈ ص

٣ $\theta = \frac{\pi}{٢}$ أى $\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \frac{\pi}{٢}$

الحل العام هو: $\frac{\pi}{٦} + ٢ن\,\pi$ أو $\frac{\pi}{٢} + ٢ن\,\pi$

جـ جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أى $\theta = \frac{\pi}{٣}$ أو θ

الحل العام هو: $\frac{\pi}{٣} + ٢ن\,\pi$ أو $-\frac{\pi}{٣} + \pi + ٢ن\pi$

ن ∈ ص

التقييم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ وكان ٢ جا θ − ١ = ٠ فإن

ق($\measuredangle\theta$) تساوى:

أ $\frac{\pi}{٦}$ ب $\frac{\pi}{٣}$

جـ $\frac{٢\pi}{٣}$ د $\frac{٥\pi}{٦}$

(٢) إذا كانت ٩٠° < θ < ٣٦٠° وكانت جتا θ ظا $\theta = \frac{١}{٢}$

فإن θ تساوى:

أ ١٢٠° ب ١٥٠°

جـ ٢١٠° د ٢٤٠°

(٣) إذا كانت جا θ = جتا θ حيث ٩٠° < θ < ٣٦٠° فإن

θ تساوى:

أ ١٣٥° ب ٢٢٥°

جـ ٣٠٠° د ٣١٥°

نشاط إضافى للطلاب المتفوقين

إذا كانت α ∈ [٠°، ٢π]

فأوجد مجموعة حل المعادلة:

ظا α = جا α الإجابة [٠، π، ٢π]

٥ - ٣

حل المثلث القائم الزاوية

Solving the Right angled triangle



٥ - ٣

حل المثلث القائم الزاوية

Solving the Right Angled Triangle

سوف تتعلم

- حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولى ضلعين.
- حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاوياه الحادة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- حل المثلث Solution of a tringle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هى أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث ، وحل المثلث يعنى إيجاد قياسات عناصره الستة، وإذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يلزم معرفة إما طولى ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين.

حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين:

مثال

(١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذي فيه أ ب = ٣٩ سم، ب جـ = ٦٢ سم.

الحل

أولًا: نوجد ق (∠ جـ):

∵ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ ظا جـ = $\frac{٣٩}{٦٢}$ ≃ ٠,٦٢٩٠٣٢٢٥٨١

باستخدام الآلة الحاسبة يكون:

ق (∠ جـ) = ١٧ً ١٠َ ٣٢°

3 9 ÷ 6 2 = Shift Tan⁻¹ Ans = °'''

نوجد ق (∠ أ):

ق (∠ أ) = ٩٠° – ١٧ً ١٠َ ٣٢° = ٤٣ً ٤٩َ ٥٧°

أو من الممكن استخدام الحاسبة كالآتى:

9 0 – 3 2 °''' 1 0 °''' 1 7 °''' = °'''

ثانيًا: نوجد طول: $\overline{\text{أ جـ}}$

∵ جا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ∵ جا ١٧ً ١٠َ ٣٢° = $\frac{٣٩}{\text{أ جـ}}$

١١٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

خلفية

وضح للطلاب أن المثلث القائم الزاوية له خمسة عناصر بالإضافة إلى الزاوية القائمة، زاويتان حادتان وثلاثة أضلاع منها طول الوتر فى المثلث، وحل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة ولإجراء ذلك لابد من توفر شرطين أحدهما هو طول أحد الأضلاع على الأقل.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين.
- يحل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية.

مفردات أساسية

حل مثلث

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – التعلم التعاونى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ١١٤ إلى صفحة ١١٦

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٤ إلى صفحة ٥٥

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

فكر وناقش

- راجع مع طلابك أنواع المثلثات من حيث نوع الزوايا، ومن حيث أطوال الأضلاع ثم اطلب إليهم وصفًا للمثلث القائم الزاوية ثم إيجاد العلاقة بين زاويتيه الحادتين وأطوال أضلاعه.

- تحديد نوع المثلث عندما يتساوى طولا ضلعين فيه.

- ◻ إيجاد النسب بين أطوال أضلاع المثلث إذا كانت إحدى زاويتيه الحادتين ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°.
- ◻ كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية و إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه

إرشادات

- ◻ وضح لطلابك أنه لا يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية قياسات زواياه لأنه يوجد فى هذه الحالة عدد لانهائى من المثلثات المتشابهة.
- ◻ ذكر طلابك بخصائص المثلث عندما يكون أحد أضلاع المثلث قطرًا فى دائرة.
- ◻ درب طلابك على الاستخدام الصحيح للآلة الحاسبة العلمية عندما نوجد طول ضلع أو قياس زاويته.
- ◻ ذكر طلابك بقواعد التقريب إلى أقرب عدد صحيح أو لعدد محدد من الأرقام العشرية.
- ◻ ذكر طلابك بالدوال المثلثية التى تربط قياسات زوايا المثلث القائم الزاوية مع أطوال أضلاعه، وكيفية استخدام الدالة المناسبة منها.
- ◻ إذا لم تذكر المسألة عدد أرقام التقريب سواءً كانت صحيحة أو عشرية، تقرب حتى أربعة أرقام عشرية.

تقييم مستمر

بند: فكر:

١) نعم يمكن استخدام جميع الدوال المثلثية لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ باستثناء دالة الظل وظل التمام.

٢) نعم يمكن استخدام نظرية فيثاغورث كالآتي:

أ جـ = $\sqrt{(٦٢)^{٢} + (٣٩)^{٢}}$

٣) نفضل نظرية فيثاغورث لأنه من المحتمل أن تكون قياسات إحدى زوايا المثلث الحادة خطأ أو ليست بالدقة الكافية نتيجة للتقريب.

---

3 9 0 ÷ sin 3 2 °''' 1 0 °''' 1 7 °''') =

فيكون أ جـ = ٣٩ / جا ١٧ ١٠ ٣٢° ≃ ٧٣,٢٤٥٨١١٢٤ سم

فكر

- ➢ هل توجد دوال مثلثية أخرى تستطيع بواستطها إيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟ اذكر هذه الدوال إن وجدت.
- ➢ هل يمكنك الاستعانة بنظرية فيثاغورث لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟ أكتب خطوات الحل إن أمكنك ذلك.
- ➢ أيهما تفضل استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ أم استخدام إحدى الدوال المثلثية؟ لماذا؟

حاول أن تحل

١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

أ) أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم   ب) ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم

حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية

مثال

٢) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب، حيث ق (∠ جـ) = ٦٢°، أ ب = ١٦ سم، مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

أ
؟
؟
١٦ سم
٦٢°
جـ
؟
ب

نوجد ق (∠ أ):

ق (∠ أ) = ٩٠° − ٦٢° = ٢٨°

نوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$:

∵ ظا جـ = أ ب / ب جـ   أى أن: ظا ٦٢° = ١٦ / ب جـ   فيكون

ب جـ × ظا ٦٢° = ١٦

ب جـ = ١٦ / ظا ٦٢° = ٨,٠٥٠٧٣٥٠٩٠٧ ≃ ٨,٥١ سم

نوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$:

∵ جا جـ = أ ب / أ جـ   أى أن: جا ٦٢° = ١٦ / أ جـ

أ جـ × جا ٦٢° = ١٦

أ جـ = ١٦ / جا ٦٢° = ١٨,١٢١١٢٠٨١ ≃ ١٨,١٢ سم

حاول أن تحل

٢) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين:

أ) أ ب = ٨ سم ، ق (∠ جـ) = ٣٤°   ب) أ جـ = ٢٦ سم ، ق (∠ أ) = ١٢′ ٥٣°

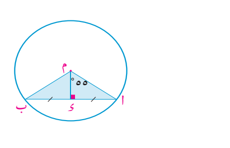
تفكير ناقد:

هل يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية زاويتيه الحادتين؟ فسر إجابتك .

مثال

(٣) الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٧ سم، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠°، احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



فى الشكل المقابل: نرسم م ى ⊥ أ ب

من خواص الدائرة: نقطة د منتصف أ ب

ق (∠ أ م ى) = ١١٠° ÷ ٢ = ٥٥°

نوجد طول أ ى فى المثلث أ ى م القائم الزاوية:

جا (أ م ى) = أ ى / أ م   من تعريف دالة الجيب

أى أن: جا ٥٥° = أ ى / ٧

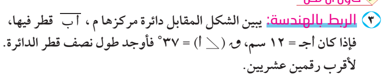
حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين :

أ ى = ٧ × جا ٥٥° ≃ ٥,٧٣٤٠٦٤٣١ سم

إيجاد طول أ ب : أ ب = ٢ × أ ى

أى أن: أ ب = ٢×٥,٧٣٤٠٦٤٣١ = ١١,٤٦٨١٢٨٦٢ ≃ ١١,٤٦٨ سم

حاول أن تحل



(٣) الربط بالهندسة: يبين الشكل المقابل دائرة مركزها م ، أ ب قطر فيها، فإذا كان أجـ = ١٢ سم، ق (∠ أ) = ٣٧° فأوجد طول نصف قطر الدائرة. لأقرب رقمين عشريين.



(١) س ص ع مثلث فيه س ص = ١١,٥ سم، ص ع = ٢٧,٦ سم، س ع = ٢٩,٩ سم، أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص، ثم أوجد قياس زاوية س

(٢) تفكير ناقد: دائرة طول نصف قطرها ٦ سم، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨° احسب طول هذا الوتر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.



تعلم : حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية.

ناقش مع طلابك الأمثلة فى صفحتى (١١٤)، (١١٥) من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل أرقام (٢)، (٣) مع متابعة إجاباتهم.

إجابة حاول أن تحل صفحة (١١٦):

(١) (أ) ٢٤ً ٤١َ ٣٣°، ٣٦ً ١٨َ ٥٦°، ١٤,٤٢٢٢سم.

(ب) ٤٩ً ٢٢َ ٦٧°، ١٢ً ٣٧َ ٢٢°، ١٢سم

(٢) (أ) ق (∠ أ) = ٥٦°

جا ٣٤° = ٨ / أ جـ   ∴ أ جـ ≃ ١٤,٣١سم

ظا ٣٤° = ٨ / ب جـ   ∴ ب جـ ≃ ١١,٨٦سم

(ب) ق (∠ أ) = ٣٦َ ٤٨

جا ٥٣َ ١٢ = أ ب / ٢٦

أ ب ≃ ٢٠,٨٢سم

ب جـ ≃ ١٥,٧سم

إجابات تفكير ناقد صفحة (١١٧):

لا يمكن ذلك لأنه يوجد عدد كبير من المثلثات المتشابهة.

(٣) جتا ٣٧ = ١٢ / ٢ نق

نق = ٦ / جتا ٣٧ ≃ ٧,٥١سم

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

(١) ٤٩ً ٢٢َ ٦٧°

(٢) جا ٥٤° = أ م / ٦

أ م = ٦ جا ٥٤° ≃ ٤,٨٥سم

أ ب = ٩,٧١ سم.

التقييم

(١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه:

(أ) ب جـ = ١٢,٦سم ، ب جـ = ١٥,٤سم

(ب) ب جـ = ٢١سم ، أ جـ = ٣٥سم

(٢) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه:

(أ) ق (∠ أ) = ٠,٧٤٣ ء ، ب جـ = ١٥,٤سم

(ب) ق (∠ جـ) = ٠,٤١٥ ء ، أ جـ = ٣٦سم

نشاط إضافى للطلاب الفائقين

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فيه أ جـ = ٢٠سم، ق (∠ جـ) = ٣٠° أوجد:

أولًا: طول أ جـ ، طول ب جـ.

ثانيًا: مساحة سطح المثلث أ ب جـ

ثالثًا: طول العمود المرسوم من ب على أ جـ



٥ - ٤ زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

Angles of Elevation and Angles of Depression

فكر و ناقش

هل يمكنك أن توجد ارتفاع مأذنه عن سطح الأرض وأنت تبتعد عنها مسافة معلومة دون أن تقوم بالقياس الفعلى لطول هذه المأذنه؟

سوف تتعلم

- مفهوم زوايا الارتفاع والانخفاض.
- استخدام المثلث القائم الزاوية لحل مسائل تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.

تعلم

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Angles of Depression

١- إذا رصد شخص أ نقطة جـ أعلى من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ تسمى زاوية ارتفاع جـ عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.

٢- و إذا رصد شخص أ نقطة د أسفل من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أد}$ تسمى زاوية أنخفاض د عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاوية ارتفاع Angle of Elevation
- زاوية انخفاض Angle of Depression

٣- فى الشكل المقابل:

- ∠ جـ أ ب هى زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للشخص عند أ.
- ∠ ى ب أ هى زاوية انخفاض الشخص عند أ بالنسبة للبالون وفى هذه الحالة يكون: $\beta = \propto$

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

١١٧ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

٥ - ٤

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

Angel of Elevation and Depression

خلفية

سبق للطالب فى درس حل المثلث القائم الزاوية ويعتبر هذا الدرس (زوايا الارتفاع والانخفاض) تطبيقًا على حل المثلث القائم الزاوية.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يدرك مفهوم زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يبين العلاقة بين زاوية الارتفاع والانخفاض.
- يستخدم المثلث القائم الزاوية لحل مسائل تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.

مفردات أساسية

زاوية ارتفاع - زاوية انخفاض

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ١١٧ إلى صفحة ١١٩

كتاب الأنشطة من صفحة ٥٦

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

ناقش مع طلابك كيفية إيجاد ارتفاع مئذنة عن سطح الأرض وذلك عندما نبتعد عنها مسافة محددة.

تعلم: زوايا الارتفاع والانخفاض

وضح أن زاوية الارتفاع أو الانخفاض هى اتحاد الشعاع الأفقى إلى الشعاع البادئ من الراصد مارًّا بالجسم المرصود.

فى البند (٣) من تعلم وضح لطلابك أن قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل

أولًا: حدد نوع كل زاوية (γ)، (β)، (θ)، (α) من حيث كونها زاوية ارتفاع أم انخفاض بالنسبة للراصد عند أ.

ثانيا: اكتب أزواج الزوايا المتساوية.

مثال

٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج تساوى ٣٦َ ٢٨°. أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل

نفرض أن أ هى قمة البرج $\overline{\text{أ ب}}$

فتكون $\measuredangle$ ء أ جـ هى زاوية انخفاض الجسم

لذلك فإن: ق ($\measuredangle$ جـ) = ق ($\measuredangle$ ء أ جـ)

تعريف دالة الظل: ظاجـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

بالتعويض عن أ ب = ٦٠: ظا ٣٦َ ٢٨° $= \frac{٦٠}{\text{ب جـ}}$

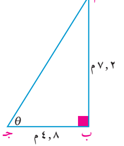
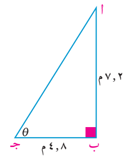
ب جـ × ظا ٣٦َ ٢٨° = ٦٠

ب جـ $= \frac{٦٠}{\text{ظا ٣٦َ ٢٨°}}$ = ١٢٥,٢٢٩٦٦ ≃ ١٢٥ مترا

حاول أن تحل

٢ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض، فوجد أن زاوية انخفاضها هو ٦٣°. أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد.

مثال

٦ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًّا على الأرض طوله ٤,٨ متر، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل

نفرض أن نقطة أ هى قمة عمود الإنارة أ ب، وأن ب جـ هو طول ظل العمود، θ زاوية ارتفاع الشمس

∵ ظاجـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ظا $\theta = \frac{٧,٢}{٤,٨}$ = ١,٥

ق ($\measuredangle \theta$) = ٣٦َ ١٨ً ٥٦°

∴ زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٣٦َ ١٨ً ٥٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٩٨٢٧٩٣٧٢٣٢ ء

١١٨ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

١ من الشكل:

زاوية γ زاوية ارتفاع

زاوية β زاوية انخفاض.

زاوية α زاوية ارتفاع

زاوية θ زاوية انخفاض

$\measuredangle \gamma = \measuredangle \beta$ ، $\measuredangle \theta = \measuredangle \alpha$

ناقش مع طلابك المثال رقم (٥) صفحة بصفحة (١١٧) من كتاب الطالب، ثم اعرض على طلابك أمثلة مشابهة لهذا المثال من عندك.

إجابات حاول أن تحل بصفحة (١١٨):

٢ جا ٦٣° $= \frac{٢,٥٦}{\text{المسافة}}$

المسافة بين النقطة والراصد $= \frac{٢,٥٦}{\text{جا ٦٣°}}$ = ٣ متر

ناقش مثال (٦) مع طلابك، موضحًا كيفية إيجاد زاوية ارتفاع الشمس، وناقش طلابك هل توجد دوال أخرى غير دالة الظل يمكن:

- استخدامها لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الشمس – وأى من هذه الدوال يفضله الطالب ولماذا.
- درب طلابك على استخدام الآلة الحاسبة بنظام الراديان لإيجاد قياس الزاوية مباشرة دون التحويل إلى درجات

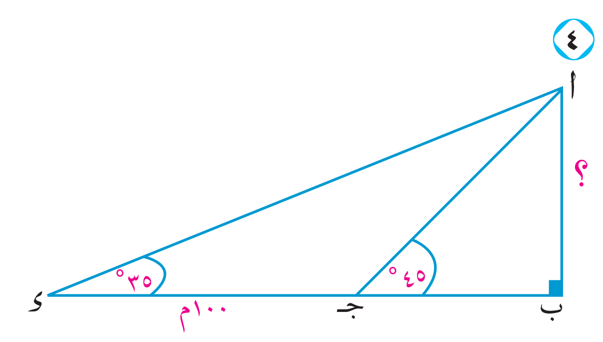
التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

٣ ظا $\theta = \frac{١٨٠}{٣٠٠}$

ق(θ) = ٠,٥٤ ء

٤



ظا ٣٠° $= \frac{\text{أ ب}}{\text{١٠٠ + ب جـ}}$

فى أ ب جـ المتساوى الساقين

أ ب = ب جـ

$\frac{\text{ظا ٣٠°}}{١} = \frac{\text{أ ب}}{\text{١٠٠ + ب جـ}}$

أ ب = ١٠ ظا ٣٠° + أ ب ظا ٣٠°

أ ب = (١ – ظا ٣٠°) = ١٠٠ ظا ٣٠

أ ب $= \frac{\text{١٠٠ ظا ٣٠°}}{\text{١ – ظا ٣٠°}}$ ≃ ١٣٧م

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

(١) أرتفاع البرج = ٥٠ جا ٢٥°

≃ ٢١ متر

(٢) المسافة = $\frac{١٠٠٠}{\text{ظا } ١٧َ ٢٥°}$

المسافة ≃ ٢١١٧ متر

(٣) المسافة = $\frac{٨٠٠}{\text{ظا } ١٧َ ٢٥°}$

≃ ١٨٧٣ متر

التقييم

(١) شاهد رجل أن قياس زاوية ارتفاع قمة تل هى ١٥ ٣٢َ ° وكانت المسافة بينه وبين قاعدة التل ٥٠٠ متر فما ارتفاع التل لأقرب متر.

(٢) من قمة برج ارتفاعه ٧٠ متر قيست زاوية انخفاض سيارة على سطح الأرض فوجدت ٢٥ ٢٧َ °. فما بعد السيارة عن قمة البرج لأقرب متر.

(٣) إذا كان ارتفاع منزل يساوى ٢٠ مترًا وكان طول ظله فى وقت ما يساوى ١٢ مترًا أوجد بالراديان زاوية ارتفاع الشمس فى هذا الوقت.

(٤) رصدت طائرة قاعدة عمودية على سطح الأرض فوجدت زاوية انخفاضها ٢٥°، فإذا كان بعد القاعدة عن مسقط الطائرة على سطح الأرض ٦٠٠ متر. فما ارتفاع الطائرة؟

نشاط إضافى للطلاب الفائقين:

يقف شخص على بعد ١٠٠ متر من قاعدة برج على قمة سارية علم فلاحظ أن قياسى زاويتى قمة السارية وقاعدة السارية ٤٦°، ٤٣° على الترتيب أوجد طول السارية لأقرب متر.

ملاحظة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد θ بالراديان مباشرة دون إيجادها بالدرجات كالآتى:

١- تهيئة الآلة الحاسبة على نظام (Radian): (Rad :4) Shift Mode 4

٢- أدخال البيانات (Data): (tan^{-1}) Shift tan 1 . 5

٣- أستدعاء النواتج (call outputs): = R MATH 0.982793732

حاول أن تحل

(٣) من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان؟

مثال

(٧) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ مترًا، ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتى انخفاضيهما، فوجدهما ٣٨°، ٥٥° أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر.

الحل

نفرض أن ارتفاع الصخرة هو أ ب، وأن البعد بين السفينتين هو جـ ى

فى △ أ ب ى:

∵ ظا ٣٨° = $\frac{٥٠}{\text{ب ى}}$ ∴ ب ى = $\frac{٥٠}{\text{ظا } ٣٨°}$

∴ ب ى ≃ ٦٤ متر

∵ ظا ٥٥° = $\frac{٥٠}{\text{ب جـ}}$ ∴ ب جـ = $\frac{٥٠}{\text{ظا } ٥٥°}$ ≃ ٣٥ متر

∵ جـ ى = ب ى − ب جـ ∴ جـ ى = ٦٤ − ٣٥ = ٢٩ متر


حاول أن تحل

(٤) شاهد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى ٣٠°، ولما سار الراصد فى مستوًى أفقى نحو المنطاد مسافة ١٠٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الارتفاع هى ٤٥°. أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر.

تحقق من فهمك

(١) يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعة برج ، رصد زاوية ارتفاع قمة برج، فوجد أن قياسها ٢٥°. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

(٢) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥°. أوجد المسافة بين الراصد عن الطائرة.

(٣) رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر عن سطح الأرض، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥°. أوجد المسافة بين الشخص والطائرة.

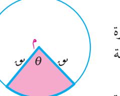
٥ - ٥
القطاع الدائرى
Circular Sector

القطاع الدائرى
Circular Sector

سوف تتعلم
- مفهوم القطاع الدائرى
- إيجاد مساحة القطاع الدائرى

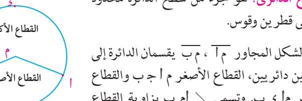
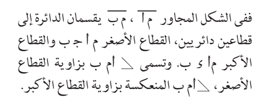
فكر و ناقش

القطاع الدائرى:
سبق أن درست العلاقة بين طول قوس (ل) من دائرة طول نصف قطرها (نق) وقياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس (θ) وعلمت أن: ل = $\theta^{ء}$ × نق.
فهل يمكنك إيجاد مساحة هذا الجزء من سطح الدائرة المظلل فى الشكل المقابل؟



القطاع الدائرى: هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفى قطرين وقوس.

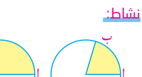
ففى الشكل المجاور $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين، القطاع الأصغر م أ جـ ب والقطاع الأكبر م أ ء ب. وتسمى ∠ أ م ب بزاوية القطاع الأصغر، ∠أ م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- قطاع دائرى Circular Sector

مساحة القطاع الدائرى **Area of the Circular sector**

نشاط:




الأشكال الموضحة بالشكل العلوى تمثل عددًا من الدوائر المتطابقة:
١- هل زيادة مساحات القطاعات الدائرية ناتج عن زيادة طول نصف قطر الدائرة؟
٢- هل زيادة مساحات القطاعات الدائرية ناتج عن زيادةقياس زاوية القطاع الدائرى؟
٣- إذا استمرت الزيادة فى قياس زاوية القطاع إلى أن ينطبق الضلع النهائى $\overrightarrow{مب}$ على الضلع الابتدائى $\overrightarrow{مأ}$ فماذا تتوقع أن تكون مساحة القطاع؟

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

خلفية
سبق للطالب أن درس الدائرة وتعرف على خواصها وتعرف على القطاع الدائرى وعلاقته بالدائرة وفى هذا الدرس سيدرس إيجاد مساحة القطاع الدائرى.

أهداف الدرس
فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يتعرف على القطاع الدائرى .
- يوجد مساحة القطاع الدائرى.

مفردات أساسية
قطاع دائرى

المواد التعليمية المستخدمة
آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة
العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - التعلم التعاونى - الطريقة الأستدلالية - حل المشكلات.

مكان التدريس
الفصل الدراسى

مصادر التعلم
الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٠ إلى صفحة ١٢٢
كتاب الأنشطة والتدريبات صفحة ٥٧
الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش
ناقش مع طلابك ما ورد فى بند «فكر وناقش» صفحة (١١٩) من كتاب الطالب، ووضح أن زاوية القطاع الأصغر محددة بالمتباينة $0° < \theta < 180°$ وزاوية القطاع الأكبر محددة بالمتباينة $180° < \theta < 360°$

تعلم: مساحة القطاع الدائرى

اطلب إلى طلابك عمل النشاط الموضح صفحة (١٢١) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات أسئلة النشاط:

١- نصف قطر الدائرة ثابت وبالتالى لا تتغير مساحة القطاع.

٢- تزداد مساحة القطاع الدائرى بازدياد قياس زاويته المركزية.

٣- فى هذه الحالة يعبر عن القطاع الدائرى بأنه أصبح دائرة وبالتالى فإن الدائرة هى قطاع دائرى زاويته 2π.

تعلم: مساحة القطاع الدائرى بمعلومية قياس زاويته المركزية وطول نصف القطر

ناقش مع طلابك قانون مساحة القطاع الدائرى مؤكدًا على أن الزاوية θ بالتقدير الدائرى (الراديان).

التقييم المستمر

تفكير ناقد

الدائرة قطاع دائرى زاويته المركزية 2π ونصف قطر دائرته نق.

ناقش مع طلابك الأمثلة الواردة صفحة (١٢٠)، (١٢١) من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» رقمى ١، ٢، ٣ مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل

(١) المساحة = $\frac{1}{2}$ نق $\theta^{د}$

٢٧٠ = $\frac{1}{2}$ × ٢٢٥ × $\theta^{د}$ ∴ هـ د = ٢,٤ د

(٢) مساحة القطاع = $\frac{60^\circ}{360^\circ}$ × ٨ (١٢)^2

= ٧٥,٤ سم^2

(٣) ٥٥ = ٢ × ١٢ + ل ∴ ل = ٣١ سم

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × ٣١ × ١٢

= ١٨٦ سم^2

القطاع الدائرى

تعلم مساحة القطاع الدائرى بمعلومية قياس زاويته المركزية وطول نصف القطر

مساحة القطاع يمثل جزء من مساحة دائرة قياس زاويتها المركزية يساوى 2π .

من النشاط السابق نستنتج أن:

$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\theta^{د}}{2\pi}$

أى أن مساحة القطاع = $\frac{\theta^{د}}{2\pi}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{\theta^{د}}{2\pi} \times \pi$ نق^2 = $\frac{1}{2}$ نق^2 $\theta^{د}$

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ نق^2 $\theta^{د}$

(حيث θ زاوية القطاع، نق طول نصف قطر دائرته)

تفكير ناقد: هل تعتبر الدائرة قطاعًا دائريًا؟ وضح ذلك

مثال

(١) أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢ د

الحل

صيغة القانون: مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ نق^2 $\theta^{د}$

بالتعويض عن نق = ١٠، $\theta^{د}$ = ١,٢ د: = $\frac{1}{2}$ (١٠)^2 × ١,٢ = ٦٠ سم^2

حاول أن تحل

(١) قطاع دائرى مساحته ٢٧٠ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، أوجد بالراديان قياس زاويته .

ثانيًا: إيجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية زاويته بالدرجات:

∵ $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة دائرته}} = \frac{\frac{1}{2}\text{نق}^2 \times \theta^{د}}{\pi\,\text{نق}^2}$

ولكن $\frac{\theta^{د}}{2\pi} = \frac{س^\circ}{360^\circ}$

∴ مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{360^\circ}$ × مساحة الدائرة

تذكر

العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى هى:

$\frac{\theta^{د}}{\pi} = \frac{س^\circ}{180^\circ}$

مثال

(٢) قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٦ سم وقياس زاويته ١٢٠°، أوجد مساحته لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل

صيغة القانون: مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{360^\circ} \times \pi$ نق^2

بالتعويض عن نق = ١٦، س° = ١٢٠°: = $\frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi$ (١٦)^2 ≃ ٢٦٨ سم^2

١٢١ كتاب الطالب - الفصل الدراسى الثانى

حاول أن تحل

(٢) قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠° وطول نصف قطر دائرته ١٢ سم أوجد مساحته لأقرب رقم عشرى واحد.

ثالثًا: إيجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية طول قوسه

تعلم أن: مساحة القطاع الدائرى $= \frac{١}{٢} نق^٢ \theta^ء$

$= \frac{١}{٢} نق^٢ \times \frac{ل}{نق} = \frac{١}{٢} ل\ نق$

(وذلك بالتعويض عن: $\theta^ء = \frac{ل}{نق}$)

تذكر: طول القوس الذى يقابل زاوية مركزية قياسها θ فى دائرة طول نصف قطرها نق يتحدد من العلاقة: $ل = \theta^ء \times نق$

مثال

(٣) أوجد مساحة قطاع دائرى محيطه يساوى ٢٨ سم، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم.

الحل

محيط القطاع = ٢ نق + ل: أى ٢ نق + ل = ٢٨

بالتعويض عن نق = ٨ سم: $٢ \times ٨ + ل = ٢٨$

بالتبسيط: $ل = ٢٨ - ١٦ = ١٢$ سم

صيغة القانون: مساحة القطاع $= \frac{١}{٢} ل\ نق$

بالتعويض عن: ل = ١٢ سم، نق = ٨ سم:

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨$ سم^٢

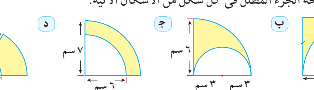
أضف إلى معلوماتك: محيط القطاع الذى طول قوسه ل وطول نصف قطر دائرته نق يتحدد من العلاقة: محيط القطاع = ٢نق + ل

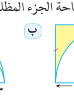
حاول أن تحل

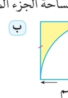
(٣) الربط بالجغرافيا: إذا علمت أن خط الاستواء هو دائرة طول نصف قطرها ٦٣٨٠ كم، فأوجد المسافة بين مدينتين على خط الأستواء إذا كان القوس الواصل بينهما يقابل زاوية قياسها ٣٠° عند مركز الأرض.

تحقق من فهمك

(١) أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية:









التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

أ) مساحة الجزء المظلل = مساحة المربع − مساحة القطاع

$= ٦٤ - \frac{١}{٤} \times \pi \times ٦٤$

$= ٦٤ - ١٦\pi$ سم^٢

ب) مساحة الجزء المظلل =

$= \frac{١}{٤}\pi \times ٣٦ - \frac{١}{٤} \times ٩\pi$

$= ٩\pi - ٤,٥\pi = ٤,٥\pi$ سم^٢

ج) مساحة الجزء المظلل =

$= \frac{١}{٤} \times \pi \times ٤٩ - \frac{١}{٤} \times ٣٦\pi$

$= ٣,٢٥\pi$ سم^٢

د) $\frac{٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times \pi \times ٢٥ - \frac{٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times \pi \times ٤$

$\frac{\pi}{٦}(٢٥ - ٤) = \frac{١}{٤}\pi$ سم^٢

التقييم:

(١) الربط بالزراعة: حوض زهور على شكل دائرة مساحتها ١٥٤سم^٢. أوجد مساحة قطاع دائرى فيها مزروع بالياسمين طول قوسه ١١ مترًا.

(٢) قطاع دائرى مساحته ٨١,٩٩سم^٢ وطول نصف قطر دائرته ٦سم. أوجد القياس الستينى والدائرى لزاويته.

(٣) قطاع دائرى محيطه ٢٤سم ومساحته ٣٦سم^٢. أوجد طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته بالقياسين الستينى والدائرى.

نشاط إضافى للطلاب الفائقين

ثلاثة دوائر طول نصف قطر كل منها ٦سم ومركزها هى رؤوس المثلث المتساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢سم. أوجد مساحة السطح المحصورة بين هذه الدوائر لأقرب أرقام عشرية.

إجابة النشاط:

مساحة المثلث ٦٢,٣٥٣٨ سم٢

مساحة القطاع الواحد = ١٨,٨٤٩٦ سم٢

المساحة المطلوبة = ٦٢,٣٥٣٨ − ٥٦,٥٤٨٧

= ٥,٨٠٥١سم^٢

٥ - ٦

القطعة الدائرية

Circular Segment



خلفية

سبق أن درس الطالب القطاع الدائرى وعلم أنه جزء من سطح الدائرة محدود ينصفى قطرين وقوس، وسوف يدرس فى هذا الدرس القطعة الدائرية.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف القطعة الدائرية.
- يوجد مساحة القطعة الدائرية

مفردات أساسية

قطعة دائرية

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٣ إلى صفحة ١٢٤

كتاب الأنشطة من صفحة ٥٨.

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

- ذكر طلابك بكيفية استخدام دالة الجيب لإيجاد ارتفاع المثلث أ م ب ومن ثم إيجاد مساحة هذا المثلث.

- وضح للطلاب بأنه عند إيجاد مساحة القطعة الدائرية، ينبغى معرفة كل من زاويتها المركزية بكل من التقديرين الدائرى والسينى وكذلك وطول نصف قطر دائرتها.

مثال

① أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم، قياس زاويتها ١٥٠°.



الحل

$\theta^{د}$ = ١٥٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ $\frac{٥\pi}{٦}$

جاθ = جا١٥٠°

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جاθ)

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ ($\frac{٥\pi}{٦}$ − جا١٥٠°) ≃ ٦٧,٧٧٥٨ سم^{٢}

حاول أن تحل

① أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم، قياس زاويتها ٢,٢^{د} مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

مثال

② دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ١٢ سم، وتمر كل منهما بمركز الأخرى. أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

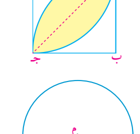
الحل

نرسم $\overline{أجـ}$ فيقسم الجزء المظلل إلى قطعتين متساويتين فى المساحة حيث الزاوية المركزية لكل منها ٩٠° ونصف قطر كل منها ١٢ سم.

مساحة الجزء المظلل = ٢ × مساحة القطعة الدائرية

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جاθ)

= ١٤٤ ($\frac{\pi}{٢}$ − جا$\frac{\pi}{٢}$) = ١٤٤ × ٠,٥٧ ≃ ٨٢,١٩ سم^{٢}



حاول أن تحل

② أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها ١٢ سنتيمترًا وارتفاعها ٢ سنتيمتر مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع.

تحقق من فهمك

① زينه: حوض زهور على شكل دائرة طول نصف قطرها ٨ أمتار، رسم فى الدائرة وتر طوله ٨ أمتار. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى لأقرب رقم عشرى واحد.

② زراعة: حوض للزرع على شكل دائرة طول نصف قطرها ٤ أمتار، قُسم إلى أربعة أجزاء بواسطة مثلث متساوى الأضلاع تقع رؤوسه على الدائرة. احسب مساحة إحدى القطع الدائرية الصغرى لأقرب رقمين عشريين.



١٢٤ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

التقييم المستمر

إجابة فكر:

مساحة القطعة الدائرية الكبرى = مساحة سطح الدائرة − مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

ناقش مع طلابك الأمثلة الواردة صفحة (١٢٤) من كتاب الطالب ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند «حاول أن تحل» رقمى (١)، (٢) من نفس الصفحة مع متابعة إجاباتهم.

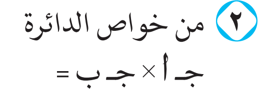
التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

① مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (٢,٢^{د} − جا ٢,٢^{د})

= ٦٩,٥٧٥٢ سم^{٢}

② من خواص الدائرة



جـ أ × جـ ب =

جـ ء × (٢نق − جـ ء)

٦ × ٦ = ٢(٢نق − ٢)

نق = ١٠سم

زاوية القطعة الصغرى

جا (∠ أ م جـ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

ق(∠ أ م ب) = ٢٣ً ٤٤َ ٧٣°

ق(∠ أ م ب) المنعكسة = ٣٧ً ١٥َ ٢٨٦°

مساحة القطعة الكبرى

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ ($\frac{٣٧ً ١٥َ ٢٨٦° \times \pi}{١٨٠°}$ − جا ٣٧ً ١٥َ ٢٨٦°)

≃ ٢٩٨سم^{٢}

التدريب والتقييم

إجابات تحقق من فهمك:

① الزاوية المركزية للقطعة = ٦٠

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ ($\frac{٦٠ \times \pi}{١٨٠}$ − جا ٦٠)

= ٥,٨ سم^{٢}

② مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ × ١٦($\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°}$ − جا ١٢٠°)

= ٩,٨٣سم^{٢}

التقييم

① أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٢٠سم وقياس زاويتها المركزية تساوى ٦٠°.

② قطعة من الورق على شكل قطعة دائرية طول قوسها ٦٠سم وطول نصف قطر دائرتها ١٢سم. احسب مساحة قطعة الورق.

③ دائرتان متساويتان طول نصف قطر كل منها ١٠سم وتمر كل منها بمركز الأخرى. أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

نشاط إضافى للطلاب الفائقين:

دائرتان متساويتان طول نصف قطر كل منها ٦سم وتمر كل منها بمركز الأخرى. أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

إجابة النشاط

مساحة المنطقة المشتركة = ضعف القطعة الدائرية الصغرى لإحدى الدائرتين.

زاوية القطعة الدائرية = ١٢٠°

مساحة إحدى القطعتين = ٢٢,١١١١ سم^{٢}

مساحة القطعة المشتركة = ٤٤,٢٢٢٢ سم^{٢}



٥ - ٧
المساحات
Areas

خلفية

سبق للطالب دراسة مساحة سطح المثلث فى المراحل السابقة وكذلك مساحة بعض الأشكال الرباعية وفى هذا الدرس سوف ندرس مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما، وكذلك مساحة الشكل الرباعى بمعلومية طولى قطريه والزاوية المحصورة بينهما.

أهداف الدرس

فى نهاية هذا الدرس من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مساحة المثلث.
- يوجد مساحة الشكل الرباعى.
- يوجد مساحة المضلع المنتظم.

مفردات أساسية

مضلع منتظم

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – حل المشكلات.

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

الكتاب المدرسى من صفحة ١٢٥ إلى صفحة ١٢٨

كتاب الأنشطة والتدريبات من صفحة ٥٩ إلى صفحة ٦٠

الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

إجراءات الدرس

التمهيد

فكر وناقش

- وضح لطلابك أنه عند إيجاد مساحة المثلث بمعلومية طول القاعدة والارتفاع فإن قانون المساحة يكون صحيحًا للمثلث المنفرج الزاوية والقائم الزاوية أيضًا.



المساحات
Areas
٥ - ٧

فكر و ناقش

مساحة المثلث: The Area of a Triangle

سبق أن درست مساحة المثلث وعلمت أن مساحته تتحدد كالآتى:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

ففى الشكل المجاور:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ ى

فكر: هل تنطبق هذه العلاقة على المثلث القائم الزاوية والمثلث المنفرج الزاوية؟

مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

The Area of a tringle in terms of the lengths of two sides and the included angle

تعلم

من الشكل المقابل:

جا ب = $\frac{أ ى}{أ ب}$ أى أن: أ ى = أ ب جا ب

ومن قانون مساحة المثلث:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ ى

= $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ب جا ب

تعبير شفهى: أوجد مساحة المثلث بمعلومية كل من:

(أ) جـ أ، جـ ب، ∠ جـ (ب) أ ب، أ جـ، ∠ أ

وبوجه عام نستنتج أن:

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

سوف تتعلم
- مساحة المثلث
- مساحة الشكل الرباعى
- مساحة المضلع المنتظم

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- مضلع منتظم regular polygon

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى ١٢٥

تعلم: إيجاد مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

ناقش مع طلابك قانون مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، موضحًا كفية إثباته.

فى تعبير شفهى:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × جـ أ × جـ ب جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ جـ جا أ

وبالتالى يمكن تعميم القاعدة صـ ١٢٧

ناقش المثال الموضح صفحة (١٢٨) من كتاب الطالب، ثم اطلب إليهم حل ما ورد فى بند حاول أن تحل مع متابعة إجاباتهم.

التقييم المستمر

إجابات حاول أن تحل:

(١) مساحة المثلث = ١٥٦٫٨٢ سم٢

تعلم : إيجاد مساحة الشكل الرباعى

ناقش مع طلابك كيفية إيجاد مساحة الشكل الرباعى مستعينًا بما ورد فى صفحة (١٢٧) من كتاب الطالب.

فى بند فكر :

لا تتغير مساحة الشكل الرباعى إذا استبدلنا الزاوية الحادة بالزاوية المنفرجة المكملة لها لأن:

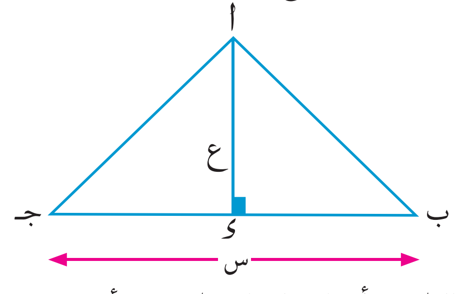
جا θ = جا (١٨٠° − هـ)

التقييم المستمر

إجابة حاول أن تحل:

(٢) مساحة الشكل الرباعى ≃ ٦٢٤,٢ سم^2

إيجاد مساحة المضلع المنتظم



وضح للطلاب بأن المضلع المنتظم جميع أضلاعه متساوية الطول وجميع زواياه متساوية القياس ويتكون المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه (ن) من نفس العدد من المثلثات المتطابقة والمتساوية الساقين حيث تكون زاوية قياس رأس المثلث المتساوى الساقين = $\frac{360°}{ن}$

ويكون ق (∠ ب أ ى) = $\frac{180°}{ن} = \frac{\pi}{ن}$

التقييم المستمر

إجابات تعبير شفهى:

نعوض فى القانون:

مساحة الشكل المنتظم = $\frac{1}{4}$ن س^2 × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

(١) عندما ن = ٣

مساحة المثلث = $\frac{1}{4}$ × س^2 × $\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$س^2

(٢) عندما ن = ٤

مساحة المربع = س^2

(٣) مساحة السداسى المنتظم = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ س^2

مثال

(١) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى أ ب = ٩ سم، أ جـ = ١٢ سم، ق(∠أ) = ٤٨° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أ ب × أ جـ جا أ

بالتعويض عن أ ب = ٩ سم، أ جـ = ١٢ سم، ق(∠أ) = ٤٨°

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٩ × ١٢ × جا ٤٨ ≃ ٤٠,١٣ سم^2

1 ÷ 2 × 9 × 1 2 × Sin 4 8 =

حاول أن تحل

(١) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم، ب أ = ٢٢ سم، ق(∠ب) = ٦٣° مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

إيجاد مساحة الشكل الرباعى المحدب The Area of a Convex Quadrilateral

فى الشكل المقابل:

أ ب جـ ى شكل رباعى فيه $\overline{أجـ} \cap \overline{بى}$ = {م}

$\overline{أهـ} \perp \overline{بى}$، $\overline{جـو} \perp \overline{بى}$، θ هى الزاوية المحصورة بين القطرين.

مساحة الشكل الرباعى = مساحة △أ ب ى + مساحة △جـ ب ى

= $\frac{1}{2}$ ب ى × أ هـ + $\frac{1}{2}$ ب ى × جـ و

= $\frac{1}{2}$ ب ى (أ هـ + جـ و) = $\frac{1}{2}$ ب ى (أ م جا θ + جـ م جا θ)

= $\frac{1}{2}$ ب ى × (أ م + م جـ) جا θ = $\frac{1}{2}$ ب ى × أ جـ × جا θ

وبوجه عام يكون مساحة الشكل الرباعى بمعلومية طولى قطريه والزاوية المحصورة بينهما هى:

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

فكر: هل تتغير مساحة الشكل الرباعى إذا استبدلنا الزاوية θ بالزاوية المكملة لها؟ فسر إجابتك.

١٢٦ الرياضيات – الصف الأول الثانوى

المساحات

مثال

(٢) أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

صيغة المساحة هى:

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٦ × جا ٦٨° ≃ ٨٩ سم^2

حاول أن تحل

(٢) أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم، ٤٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

(٣) **تفكير ناقد:** احسب باستخدام القانون السابق مساحة كلاً من

أ) مربع طول قطره ١٠ سم

ب) معين طولا قطريه ٨ سم ، ١٢ سم – ماذا تلاحظ؟

إيجاد مساحة المضلع المنتظم The area of a regular polygon

شكل (١): يمثل مضلع منتظم، عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س.

شكل (٢): يمثل أحد المثلثات المأخوذة من شكل (١)

∵ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{2\pi}{ن}$ (لماذا؟)

∴ ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{أى}{بى}$ أى أن أ ى = ب ى × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

أ ى = $\frac{1}{2}$ س ظتا $\frac{\pi}{ن}$ (حيث س طول ضلع المضلع)

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ ى = $\frac{1}{2}$ س × $\frac{1}{2}$ س ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{1}{4}$ س^2 × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

شكل (٢) شكل (١)

مساحة المضلع الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^2 × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

مثال

(٣) أوجد مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه ٦ سم مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

١٢٧ كتاب الطالب – الفصل الدراسى الثانى

إجابات حاول أن تحل

مساحة الخماسى المنتظم =

$= \frac{1}{4} \times ٥ \times (١٦)^٢ \text{ ظتا } \frac{١٨٠^\circ}{٥}$

$= ٤٤٠,٤٤٢ \text{ سم}^٢$

نشاط

اطلب إلى طلابك القيام بالنشاط الموضح صفحة (١٢٨) من كتاب الطالب مع متابعة إجاباتهم.

سلم تقييم النشاط

التقدير	أداء الطالب
ممتاز ١٠ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة ويحصل على نتائج دقيقة.
جيد جدًّا ٨ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط بدقة ولكنه يحتاج لمساعدة طفيفة من المعلم للحصول على نتائج دقيقة.
جيد ٧ درجات	ينفذ الطالب خطوات النشاط ولكنه يحصل على بعض النتائج الخطأ.
مقبول ٥ درجات	يحاول الطالب بمساعدة المعلم تنفيذ خطوات النشاط ويحصل على بعض النتائج ولكن بعضها خطأ.
ضعيف أقل من ٥ درجات	لا يستطيع تنفيذ خطوات النشاط ويحتاج إلى المساعدة والتوجيه من قبل المعلم.

ملاحظة على كراسة الأنشطة فى صفحة (٥٩)

- وجه نظر الطلاب إلى إيجاد طول ضلع الشكل أو ارتفاعه أو طول قطره لحساب المسافة المطلوبة من خلال قانون المساحة المناسبة.

نشاط للطلاب الفائقين:

يمكن إيجاد مساحة المثلث أ ب جـ الذى أطوال أضلاعه أ/، ب/، جـ/ ومحيطه هو ٢ح

$٢ح = أ/ + ب/ + جـ/$ فتكون:

$ح = \frac{أ/ + ب/ + جـ/}{٢}$

من العلاقة

مساحة المثلث $= \sqrt{ح(ح - أ/)(ح - ب/)(ح - جـ/)}$

ويعرف هذا القانون بقانون (هيرو)

 الحل

صيغة القانون مساحة الشكل المنتظم $= \frac{1}{4} ن س^٢ \times \text{ ظتا } \frac{\pi}{ن}$

بالتعويض عن ن = ٨، س = ٦ سم:

$\text{المساحة} = \frac{1}{4} \times ٨ \times (٦)^٢ \times \text{ ظتا } \frac{١٨٠^\circ}{٨}$

$= ٧٢ \times \frac{١}{\text{ظا } ٢٢,٥^\circ} \simeq ١٧٣,٨ \text{ سم}^٢$

تعبير شفهى:

باستخدام صيغة القانون السابق أوجد مساحة كل من:

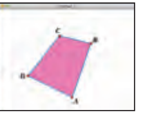
١- المثلث المتساوى الأضلاع ٢- المربع ٣- المسدس المنتظم

حاول أن تحل

٤ أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

نشاط

استخدم برنامج (GSP) المجانى SKETCHEXCHANGE وتحميله من الموقع http://www.keycurriculum.com/products/sketchpad يستخدم هذا البرنامج لرسم الأشكال الهندسية المختلفة و إيجاد أطوال أضلاعها وقياسات زواياها ومساحاتها كما يستخدم فى رسم الدوال الجبرية و إيجاد خصائصها فمثلًا لرسم شكل رباعى و إيجاد مساحته نتبع الآتى:



١- نفتح البرنامج كما فى الشكل المجاور.

٢- بالضغط على الأيقونة نختار صفة الشكل الذى نريد رسمه وبالضغط بالماوس نحدد نقاط الشكل على الرسم.

٣- بالضغط على الأيقونة A نكتب رموز الشكل تلقائيًّا بمجرد تحديد نقاط الشكل.

٤- بالضغط على الأيقونة يمكن الاختيار المناسب لإجراء التحويلات الهندسية المختلفة على الشكل أو تغيير أبعاده.

٥- بالضغط على الأيقونة يمكن رسم قطع مستقيمة أو مستقيمات أو أشعة فى الشكل.

٦- من التبويب (Measure) نختار نوع القياس المطلوب (محيط، مساحة ، طول ضلع، قياس زاوية، ...) مع كتابة بيانات كل قياس بجوار الشكل.

٧- للتعرف على أدوات أكثر أو عمليات أخرى استخدم التبويب (Help).

١٢٨ الرياضيات - الصف الأول الثانوى

التقييم

١ أوجد مساحة أ ب جـ حيث:

أ أ ب = ٨سم، ب جـ = ١٢سم، و $(\angle ب) = ٩٠^\circ$

ب أ ب = ٦,٢سم، أ جـ = ٨,٤سم، و $(\angle أ) = ٣٤^\circ$

٢ أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ى الذى فيه: أ جـ = ٢٤سم، ب ى = ٣٢سم، وقياس الزاوية بين قطريه ٦٤°.

٣ أوجد مساحة كل من الأشكال المنتظمة الآتية:

أ شكل ذو سبعة أضلاع منتظم طول ضلعه ٩سم.

ب شكل ذو تسعة أضلاع منتظم طول ضلعه ٦سم.

نشاط إضافى للطلاب الفائقين:

أوجد عدد أضلاع الشكل المنتظم الذى طول ضلعه ١٠سم، ومساحته $١٥٠\sqrt{٣} \text{ سم}^٢$

John J . Bradiy and other, Algebra, U.S.A, prentice Hall, Zolo

Eleanor Beoher and other, Advanced Algebra, U.S.A Prentice Hall, 2010

Sandra Argtielles Daire and others, Geometry U.S.A, prentice Hall, 2010

Randall I . Charles and others, Math, Corse 3 . U.S.A, prentice Hall, 2010

J.F Talgert and H.H.Heng, Additional Mathematics, FiFth Edition, 1992, Longman S'ingapore publishers (Ptc) limited.

S.Rayner, General Mathemematics, Revision and Practice, Second edition, 1992, oxford university press.

Edward D. Gaughan and others, Algebra, Second course 1982, Scott Foresman.

Mizrahi Sullivan, Mathematics, sixth edition, 1996, John wiley and sone, Inc.

Ernest F. Haeussler, Jr. and others, Introductory mathematical Analysis, Eleventh Edition, 2005, pearson, prentice Hall.

G.N YAkovlEv, High school mathematics, Part1, 1982, Mir Publishers, moscow.

G.N. YakovLEV, High school mathematics, part2, 1982, Mir pablishers Moscow.

ثانيًا: المواقع الإلكترونية

(/http: // geogebra. org/com)

(/http: www.pedowan. dk)

(http:// www. phschool.com)

www. NCTM. org

http://www. key curriculum. com / products/ sketchpad

قاموس المصطلحات التربوية والعلمية

الفصل الدراسي الأول

أضلاع متناظرة	Corresponding Sides
إشارة دالة	function Signal
بديهية	Postulate / Axiom
تناسب	Proportion
جذر	Root
جيب	Sine
جيب تمام	Cosine
دائرة	Circle
دالة	Function
دالة الجيب	Sine Function
دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية)	Quadratic Function
دالة ثابتة	Constant Function
دالة جيب التمام	Cosine Function
دالة خطية (دالة الدرجة الأولى)	Linear Function
دالة مثلثية	Trigonometric Function
دوائر متحدة المركز	Concentric Circles
زاوية ربعية	Quarterly Angle
زاويا متطابقة	Congruent Angles
زاوية مكافئة	Equivalent Angle
زاوية موجهة	Directed Angle
زاوية نصف قطرية (راديان)	Radian
شكل خماسي	Pentagon
شكل رباعي	Quadrilateral
ضرب تبادلى	Cross Product
طرف	Extreme
طول	Length
ظل	Tangent
ظل تمام	Cotangent
عامل	Factor
عدد تخيلي	Imaginary Number
عدد مركب	Complex Number
علاقة	Relation
قاطع	Secant
قاطع تمام	Cosecant
قطر	Diameter
قوة نقطة	Power of a Point
قياس دائرى	Measure Radian
قياس زاوية	Measure of an Angle
قياس سالب	Negative Measure
قياس ستينى	Degree Measure
قياس موجب	Positive Measure
قيمة صغرى	Minimum Value
قيمة عظمى	Maximum Value
متباينة	Inequality
متعامد	Perpendicular
متوسط	Median
مثلثات متشابهة	Similar Triangles
محيط	Perimeter
مساحة	Area
مساحة مضلع	Area of Polygons
مضلعات متشابهة	Similar Polygons
مضلع منتظم	Regular Polygon
معادلة	Equation
معامل	Coefficient
مماس	Tangent
مماس خارجى مشترك	Common External Tangent
مماس داخلى مشترك	Common Internal Tangent
مميز	Discriminant
منتصف	Midpoint
منصف	Bisector
منصف خارجي	Exterior Bisector
منصف داخلى	Interior Bisector
نسبة	Ratio
وتر	Chord
وسط	Mean
وضع قياسى	Standard Position
يوازى	Parallel

الفصل الدراسي الثانى

اتجاه	Direction
إزاحة	Displacement
الحل الأمثل	Optimize
القطر الآخر للمحدد	Other diagonal
القطر الرئيسى للمحدد	Principle or leading diagonal
القيود	Constrains
برمجة خطية	linear Programing
تقسيم من الخارج	External Division
تقسيم من الداخل	Internal Division
توازن القوى.	Equilibrium of forces
جمع المتجهات	Addition of vector
جمع المتجهات	Addition of vectors
جمع المصفوفات	Adding matrices
حل المثلث	Triangle solve
خط مستقيم	Straight Line
رسم بياني	Graph

قاموس المصطلحات التربوية والعلمية

زاوية ارتفاع	Angle of Elevation
زاوية انخفاض	Angle of Depression
زاوية بين مستقيمين	Anagle between Two Straight lines
زوج مرتب	Orderd Pair
سرعة نسبية.	Relative Velocity
صورة قطبية	Polar Form
ضرب	Multiplication
ضرب المصفوفات	Matrix Multiplication
طرح المتجهات	Subtraction of Vectors
طرح المصفوفات	Subtracting Matrices
عمود	Perpendicular
عنصر	Element
غير محدود	Unbounded
قاعدة المثلث	Triangle Rule
قاعدة متوازى الأضلاع	Parallelogram Rule
قطاع دائرى	Circul Sector
قطعة دائرية	Circular Segment
قوة محصلة.	Resultant Force
قيمة مطلقة	Absolute Value
كمية قياسية	Scalar
متباينة خطية	Linear Inequality
متباينة خطية في مجهول واحد	Linear inequality in one unknown
متباينة خطية في مجهولين	Linear inequality in two unknowns
متجه (كمية متجهة)	Vector
متجه (كمية متجهة)	Vector
متجه اتجاه مستقيم	vector of Straight line Direction
متجه مكافيء	equivalent Vector
متجه موضع	Position Vector
متجه وحدة	Unit Vector
متطابقة	Identitie
محدد	Determinant
محدد الدرجة الثانية	Second Order Determinant
محدد من الدرجة الثالثة	Third Order Determinant
محدود	Bounded
مدور مصفوفة	Transpose of Matrix
مسافة	Distance
مستقيم حدى.	Boundary line
مستقيم حدي متصل.	Solid boundary line
مستقيم حدي منقط.	Dashed Boundary line
مصفوفات متساوية	Equal Matrix
مصفوفة	Matrix
مصفوفة الثوابت	Constant Matrix
مصفوفة الصف	Raw Matrix
مصفوفة العمود	Column Matrix
مصفوفة المتغيرات	Variable Matrix
مصفوفة المعاملات	Coefficient Matrix
مصفوفة الوحدة	Identity Matrix
مصفوفة شبه متماثلة	Semi Symmetric Matrix
مصفوفة صفرية	Zero Matrix
مصفوفة متماثلة	Symmetric Matrix
مصفوفة مربعة	Square Matrix
مضلع منتظم	Regular Polygon
معادلة	Equation
معادلة بارامترية	Parometric Equation
معادلة عامة	General Equation
معادلة كارتيزية	Cartisian Equation
معادلة متجهة	Vector Equation
معادلة مثلثية	Trigonometric Equation
معادلة مصفوفية	Matrix Equation
معكوس ضربى لمصفوفة	Inverse Matrix
معيار متجه	Norm
مقدار	Magnitude
منطقة الحل	Feasible Region
نسبة التقسيم	ratio of Division
نظام متباينات خطية	System of linear Inequalities
نقطة تقاطع مستقيمين	Intersection Point of two straight lines

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات	
الجبر والعلاقات والدوال	❑ يحل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا. ❑ يوجد مجموع وحاصل ضرب جَذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد. ❑ يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كلهما. ❑ يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد. ❑ يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها. ❑ يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد. ❑ يبحث إشارة المقدار الجبرى. ❑ يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين). ❑ يحل متباينات من الدرجةالثانية فى مجهول واحد.	الدرس (١ – ١): حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد. الدرس (١ – ٢): مقدمة عن الأعداد المركبة. الدرس (١ – ٣): نوع جذرى المعادلة التربيعية. الدرس (١ – ٤): العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها. الدرس (١ – ٥): إشارة الدالة. الدرس (١ – ٦): متباينات الدرجة الثانية.	
التشابه	❑ يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه. ❑ يتعرف تشابه مضلعين. ❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان). ❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين). ❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ...) ❑ يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...) ❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ...) ❑ يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على : (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.	**الدرس (٢ – ١)**: تشابه المضلعات **الدرس (٢ – ٢)**: تشابه المثلثات. **الدرس (٢ – ٣)**: العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين. **الدرس (٢ – ٤)**: تطبيقات التشابه فى الدائرة.	

خريطة المنهج للفصل الدراسى الأول

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	معادلة – جذر المعادلة – معامل الحد – مميز المعادلة – إشارة المقدار الجبرى – عدد مركب – عدد تخيلى – قوى العدد – متباينة	المناقشة – العصف الدهنى – المحاضرة – الطريقة الاستقرائية – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الدرس والأسئلة المتضمنة في بند "حاول أن تحل" كتطبيق لكل مثال، وكذلك الأسئلة الواردة في بند "تحقق من فهمك" في نهاية كل درس والأسئلة المتضمنة فى كل من التمارين العامة للوحدة واختبار الوحدة والاختبار التراكمى.
	نسبة – تناسب – قياس زاوية – طول – مساحة – ضرب تبادلى – طرف – وسط – مضلعات متشابهة – مثلثات متشابهة – أضلاع متناظرة – زوايا متطابقة – مضلع منتظم – شكل رباعي – شكل خماسي – بديهية – محيط – مساحة مضلع – وتر – قاطع – مماس – قطر – مماس خارجي مشترك – مماس داخلي مشترك – دوائر متحدة المركز	التعلم التعاونى – الاكتشاف الموجه – الطريقة الاستنباطية – العصف الذهنى – المناقشة – حل المشكلات.	أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل و أثناء وبعد الدرس أو الأنشطة المقترحة – تقييم الوحدة واختبار تراكمى في نهاية الوحدة.

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات	
نظريات التناسب فى المثلث	❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه ...) وعكسها، ونتائج عليها. ❑ يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على : (إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية فإن ...) وحالات خاصة منها. ❑ يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة لمثلث عند هذا الرأس ...) وحالات خاصة منها. ❑ يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات). ❑ يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة. ❑ يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.	الدرس (٣ – ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة الدرس (٣ – ٢): منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة الدرس (٣ – ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة	
حساب المثلثات	❑ يتعرف الزاوية الموجهة. ❑ يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة. ❑ يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة. ❑ يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى). ❑ يتعرف القياس الدائرى للزاويا مركزية فى دائرة ❑ يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى القياس الستينى والعكس. ❑ يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة. ❑ يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية. ❑ يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية. ❑ يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة. ❑ يتعرف الزوايا المنتسبة (١٨٠° $\pm$ θ)، (٣٦٠° $\pm$ θ)، (٩٠° $\pm$ θ)، (٢٧٠° $\pm$ θ)، ❑ يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم الدوال المثلثية لها . ❑ يتعرف التمثيل البيانى لدوال الجيب وجيب التمام، ويستنتج خواص كل منهما. ❑ يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة. ❑ ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية، والتى تمثلها دوال مثلثية. ❑ يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.	الدرس (٤ – ١): الزاوية الموجهة. الدرس (٤ – ٢): وحدات قياس الزاوية. الدرس (٤ – ٣): الدوال المثلثية. الدرس (٤ – ٤): العلاقة بين الدوال المثلثية. الدرس (٤ – ٥): التمثيل البيانى للدوال المثلثية. الدرس (٤ – ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.	

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	نسبة - تناسب - يوازي - نقطة تنصيف - متوسط - قاطع - منصف - منصف داخلى - منصف خارجي - عمودى على	تعلم تعاونى - تعلم بالاكتشاف الموجه - الطريقة الاستنباطية - العصف الذهنى - المناقشة - حل المشكلات.	أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة - تمارين عامة على الوحدة - اختبار الوحدة - اختبار تراكمى فى نهاية الوحدة
	قياس ستينى - قياس دائرى - زاوية موجهة - زاوية نصف قطرية (راديان) - وضع قياسى - قياس موجب - قياس سالب - زاوية مكافئة - زاوية ربعية - دالة مثلثية - جيب - جيب تمام - ظل - قاطع تمام - قاطع - ظل تمام - دالة دائرية - دالة مثلثية عكسية	المناقشة - العصف الذهنى- المحاضرة - الطريقة الاستقرائية - الطريقة الاستنباطية - التعلم التعاونى.	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية وأنشطة العمل التعاونى وأسئلة حاول أن تحل، أسئلة تحقق من فهمك، والأسئلة الواردة فى تمارين على الوحدة واختبار نهاية الوحدة، والاختبار التراكمى.

خريطة المنهج للفصل الدراسي الثاني

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
المصفوفات	❑ يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها. ❑ يتعرف بعض المصفوفات الخاصة (مصفوفة الصف - مصفوفة العمود - المصفوفة المربعة - المصفوفة الصفرية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة). ❑ يضرب عدد حقيقي في مصفوفة . ❑ يتعرف تساوى مصفوفتين - يوجد مدور المصفوفة ❑ يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات. ❑ يتحقق من صحة حلول بعض المشكلات التى تتضمن مصفوفات باستخدام البرمجيات المتاحة. ❑ ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات. ❑ يوظف استخدام المصفوفات في مجالات اخرى. ❑ يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة. ❑ يوجد قيمة المحدد على الصورة المثلثية. ❑ يوجد معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة ٢ × ٢. ❑ يحل معادلتين انيتين باستخدام معكوس المصفوفة. ❑ يحل المعادلات بطريقة كرامر. ❑ يوجد مساحة المثلث باستخدام المحددات.	الدرس (١ - ١): تنظيم البيانات في مصفوفات. الدرس (١ - ٢): جمع وطرح المصفوفات. الدرس (١ - ٣): ضرب المصفوفات . الدرس (١ - ٤): المحددات . الدرس (١ - ٥): المعكوس الضربي للمصفوفة
البرمجة الخطية	❑ يحل متباينات من الدرجة الأولى في مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًّا. ❑ يحل متباينات من الدرجة الأولى في مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًّا. ❑ يحل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا. ❑ يحل مسائل حياتيةعلى أنظمة المتباينات الخطية. ❑ يستخدم البرمجة الخطية في حل مشكلات رياضية حياتية. ❑ يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية في جدول مناسب، ويترجم البيانات لها في صورة متباينات خطية، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًّا. ❑ يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات، مع تحديد النقط التي تنتمى إلى مجموعة الحل، وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.	**الدرس (٢ - ١)**: المتباينات الخطية. **الدرس (٢ - ٢)**: حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًّا. **الدرس (٢ - ٣)**: البرمجة الخطية والحل الأمثل.
المتجهات	❑ يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة، ويعبر عنها بدلالة طرفيها في مستوى الإحداثيات. ❑ يتعرف متجه الموضع ويضعه في الصورة القطبية. ❑ يوجد معيار المتجه، والمتجه الصفرى. ❑ يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين. ❑ يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين. ❑ يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين. ❑ يضرب متجه في عدد حقيقي. ❑ يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين. ❑ يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات. ❑ يحل تطبيقات في الهندسة المستوية على المتجهات.	**الدرس (٣ - ١)**: الكميات القياسية، والكميات المتجهة، والقطعة المستقيمة الموجهة. **الدرس (٣ - ٢)**: المتجهات . **الدرس (٣ - ٣)**: العمليات على المتجهات . **الدرس (٣ - ٤)**: تطبيقات المتجهات.

خريطة المنهج للفصل الدراسى الثانى

المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
مصفوفة – عنصر – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – مصفوفة مربعة – مصفوفة صفرية – مصفوفات متساوية – مصفوفة متماثلة – مصفوفة شبه متماثلة – معادلة مصفوفية – مصفوفة المتغيرات – مصفوفة الثوابت – جمع المصفوفات – طرح المصفوفات – ضرب المصفوفات – مدور المصفوفة – محدد – محدد الدرجة الثانية – محدد الدرجة الثالثة – مصفوفة المعاملات – معكوس ضربى للمصفوفة	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – التعلم التعاونى – حل المشكلات	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى في نهاية الوحدة.
متباينة خطية – مستقيم حدى – مستقيم حدى منقط – مستقيم حدى متصل – متباينة خطية في مجهولين – نظام المتباينات الخطية – منطقة الحل – رسم بياني – برمجة خطية – القيود – الحل الأمثل	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	تتمثل في الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى في نهاية الوحدة.
كمية قياسية – متجه (كمية متجهة) – مسافة – إزاحة – متجه موضع – زوج مرتب – قيمة مطلقة – معيار متجه – متجه مكافئ – جمع المتجهات – ضرب – قاعدة المثلث – قاعدة متوازى الأضلاع – قوة محصلة (محصلة القوى)	التعلم التعاونى – الطريقة الاستنباطية – العصف الذهنى – العرض والمناقشة – حل المشكلات.	أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وتمارين عامة على الوحدة واختبار الوحدة والاختبار التراكمى.

خريطة المنهج للفصل الدراسى الثانى

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات
نظريات التناسب فى المثلث	❑ يوجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم. ❑ يوجد النسبة التى تقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم نهايتا القطعة المستقيمة. ❑ يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم. ❑ يوجد المعادلة المتجهة والمعادلات البارامترية، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم. ❑ يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم. ❑ يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات. ❑ يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين. ❑ يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم. ❑ يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.	**الدرس (٤ - ١)**: تقسيم قطعة مستقيمة. **الدرس (٤ - ٢)**: معادلة الخط المستقيم. **الدرس (٤ - ٣)**: قياس الزاوية بين مستقيمين. **الدرس (٤ - ٤)**: طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم. **الدرس (٤ - ٥)**: المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.
حساب المثلثات	❑ يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية . ❑ يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية . ❑ يحل معادلات مثلثية بسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠، ٢π] ❑ يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة: ➢ جا أس = جتا ب س ➢ قا أس = قتا ب س ➢ ظا أس = ظتا ب س ❑ يتعرف الحل العام للمعادلة المثلثية. ❑ يحل المثلث القائم الزاوية. ❑ يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والإنخفاض. ❑ يتعرف القطاع الدائرى وكيفية إيجاد مساحته. ❑ يتعرف القطعة الدائرية وكيفية إيجاد مساحتها. ❑ يوجد مساحة المثلث، ومساحة الشكل الرباعى، مساحة المضلع المنتظم. ❑ يحل مسائل متنوعة على حساب المثلثات. ❑ يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات. ❑ ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحيوية والتى تمثل بدوال مثلثية. ❑ يستخدم انشطة لبرامج الحاسب الآلى	الدرس (٥ - ١): المتطابقات المثلثية الدرس (٥ - ٢): حل المعادلات المثلثية الدرس (٥ - ٣): حل المثلث القائم الزاوية الدرس (٥ - ٤): تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض الدرس (٥ - ٥): القطاع الدائرى الدرس (٥ - ٦): القطعة الدائرية الدرس (٥ - ٧): مساحة المثلث، مساحة الشكل الرباعى، مساحة المضلع المنتظم.

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	نقطة تقسيم – متجه اتجاه مستقيم – معادلة متجهة – معادلة بارمترية – معادلة كارتيزية – معادلة عامة – زاوية بين مستقيمين – طول عمود	المحاضرة – المناقشة – الطريقة الاستدلالية – العصف الذهنى – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء الحصة –والأسئلة الواردة "حاول أن تحل" كتطبيق لكل مثال والأسئلة الواردة"تحقق من فهمك "فى نهاية كل درس والتمارين العامة فى نهاية كل وحدة اختبار الوحدة والاختبار تراكمى.
	متطابقة مثلثية – معادلة مثلثية – زاوية ارتفاع – زاوية انخفاض – قطاع دائرى – قطعة دائرية –	المحاضرة – المناقشة – الطريقة الاستدلالية – العصف الذهنى– التعلم التعاونى.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس وكذلك الأسئلة المتضمنة فى التمارين العامة على الوحدة، واختبار الوحدة، والاختبار التراكمى.

نماذج من أساليب التقويم

الاختبار الأول (فصل دراسى أول) (الجبر)

أولًا: أكمل ما يأتي:

(١) مجموعة حل المعادلة (س + ١)^{٢} = ٤ فى ح هى ....

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ + ت، ٣ − ت هى ....

(٣) الدالة د حيث د(س) = ٣ − ٢ س تكون موجبة عندما س ∋ ....

(٤) مدى الدالة د حيث د(س) = ٣جا س هو ....

(٥) إذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، θ ∋]π، ٢π[، فإن ق($\angle\theta$) يساوى ....

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) (أ) ضع العدد (٣٢ − ٧ت) − (١٥ − ١٣ت) فى أبسط صورة.

(ب) إذا كان ٣ قا θ − ٥ = ٠ حيث ٠° > θ > ٩٠° ، فأوجد قتا θ + ظتا θ

(٧) (أ) أوجد قيمة أ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة س^{٢} − (أ + ٤) س + ٣أ^{٢} = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢س^{٢} − ٧أ س + أ^{٢} = ٠

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة جتا$^{٣}\theta$ = جا$^{٢}\theta$

(٨) (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة س^{٢} + ٢س − ١٥ ⩽ ٠

(ب) إذا كانت θ زاوية فى الوضع القياسى والتى يمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\sqrt{٥}$، −٢) فأوجد كلًّا من:

ظا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ)، قا (١٨٠° − θ).

(٩) (أ) أثبت أن جذرى المعادلة س(٦ − س) = ٣ حقيقيان ومختلفان، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

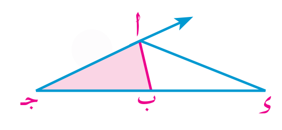
(ب) إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة ٣س^{٢} − ٢س + جـ = ٠ يساوى الفرق بين جذرى المعادلة ٢س^{٢} − جـ س + ٣ = ٠ فأثبت أن ٩جـ^{٢} + ٤٨ جـ − ٢٣٢ = ٠

الاختبار الثانى (فصل دراسى أول) (الهندسة)

أولًا: أكمل ما يأتي:

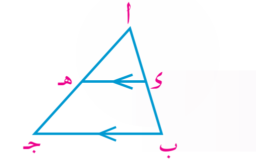
(١) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون ....

(٢) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومساحة المضلع الأصغر تساوى ٤٠سم٢، فإن مساحة المضلع الأكبر تساوي ....



(٣) فى الشكل المقابل:

إذا كان $\frac{بى}{جـى} = \frac{أب}{أجـ}$ فإن $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف ∠ ....

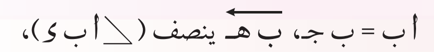


(٤) في الشكل المقابل:

إذا كان : $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$ فإن $\frac{أى}{ى ب} = \frac{....................}{....................}$ = ____________

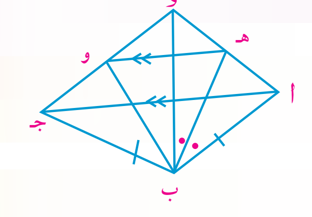
ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية

(٥) أ فى الشكل المقابل:



أ ب = ب جـ، $\overrightarrow{ب هـ}$ ينصف (∠ أ ب ى)،

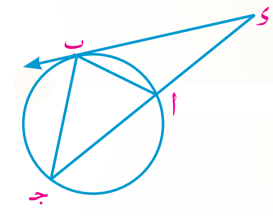
$\overline{هـ و} // \overline{أ جـ}$. أثبت أن: $\overrightarrow{ب و}$ ينصف (∠ ى ب جـ)



ب مثلثان متشابهان مساحتى سطحيهما ١٠٠سم٢، ٦٤سم٢ على الترتيب فإذا كان محيط الأول ٦٠سم. أوجد محيط الثانى.

(٦) أ أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{أ ب}$ ، هـ ∈ $\overline{أ جـ}$ بحيث أ ى = ٣سم، ى ب = ٦سم، أ هـ = ٢سم، هـ جـ = ٤سم.

أثبت أن: $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$.



ب فى الشكل المقابل:

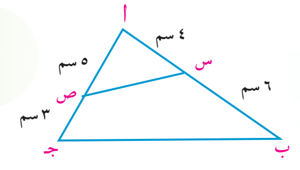
$\overline{ى ب}$ مماس عند ب، $\overrightarrow{ى جـ}$ قاطع للدائرة فى أ، جـ على الترتيب.

أثبت أن: △ى ب أ ~ △ى جـ ب،

وإذا كان ى أ = ٤سم، أ جـ = ٥سم. أوجد طول $\overline{ى ب}$

(٧) س ص ع مثلث، ى ∈ $\overline{س ص}$ ، رسم $\overline{ع ى}$ فإذا كان $\frac{ع ى}{ى ص} = \frac{س ع}{ع ص}$ ، $\frac{ع ص}{ع ى} = \frac{س ص}{س ع}$ أثبت أن:

أولًا: △ص ع ى ~ △ص س ع **ثانيًا :** $\overline{ع ص}$ مماس للدائرة التى تمر برؤوس △ س ع ى.



(٨) فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه س ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث كان أ س = ٤سم،

س ب = ٦سم، ص ∈ $\overline{أ جـ}$ بحيث كان أ ص = ٥سم، ص جـ = ٣سم:

أولًا: أثبت أن △أ س ص ~ △أ جـ ب **ثانيًا:** الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى.

ثالثًا: إذا كانت م(△أ س ص) = ٨سم٢ أوجد مساحة سطح المضلع س ب جـ ص.

نماذج من أساليب التقويم

الاختبار الثالث (فصل دراسى ثانى) (الجبر)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على نفس النظم، فإن العبارة الصحيحة هى:

(أ) أ ب = ب أ (ب) أ − ب = ب − أ (جـ) (أ ب)^{مد} = أ^{مد} ب^{مد} (د) أ + ب = ب + أ

(٢) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين الآتيتين:

٢س + ص > −٢ ، ص − س ⩽ ٤ هى:

(أ) (٠، ٣) (ب) (−٢، ٦) (جـ) (−٣، ٠) (د) (١، ٢)

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$ فإن س، ص تساوى

(أ) (٠، ١) (ب) (٠، ١) (جـ) (٢، ١) (د) (١، ٢)

(٤) أبسط صورة للمقدار جا^{٢} هـ (١ + ظتا^{٢} هـ) هى :

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) جا$^{٢}\theta$ (د) جتا$^{٢}\theta$

(٥) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطراه ١٢$\sqrt{٣}$ سم، ١٦سم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° يساوى:

(أ) ٧٢$\sqrt{٣}$ سم^{٢} (ب) ١٤٤سم (جـ) ١٤٤$\sqrt{٢٥}$ سم^{٢} (د) ١٤٤سم^{٢}

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) (أ) أوجد المصفوفة س إذا كان: س + $\begin{pmatrix} −١ & ٣ \\ −٢ & ١ \end{pmatrix}$ = ٢ × $\begin{pmatrix} ٢ & −١ \\ −٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(ب) أثبت صحة المتطابقة: جا$^{٢}\theta$ + ظا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{جتا^{٢}\theta}$

(٧) (أ) أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه (−٦، ٤)، (٥، ٣)، (−١، ٢) باستخدام المحددات .

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة ظا$^{-١}\theta$ = ٠ فى الفترة [٠، ٢π[

(٨) (أ) إذا كانت C = $\begin{pmatrix} ٢ & −١ \\ −٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} −١ & ٤ \\ ٦ & −٢ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س حيث ٢أ − س = ب^{مد}.

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٢٠سم، وقياس زاويتها ٦٠°.

(٩) (أ) من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية انخفاض سيارة على الأرض، فكانت ٤٠°. أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج مقربًا الناتج لأقرب متر.

(ب) مصنع ينتج ٩٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين، ويحقق ربحًا فى كل وحدة من النوع الأول قدره ٥ جنيهات وربحا فى كل وحدة من النوع الثانى قدره ٧ جنيهات فإذا كان ما يباع من النوع الأول لايقل عن ضعف ما يباع من النوع الثانى. فأوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من كل نوع حتى يتحقق للمصنع أكبر ربح ممكن.

الاختبار الرابع (فصل دراسى ثانى) (الهندسة)

أولًا: أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

(٢) إذا كان ||−٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$|| = م ||$\overrightarrow{\text{أ}}$|| فإن م = ...

(٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، −٥)، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٣، −٤) فإن $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

(٤) إذا كان $\overline{\text{أء}}$ متوسط فى المثلث أ ب جـ، م هى نقطة تلاقى المتوسطات حيث

أ(٠، ٨)، ب(٣، ٢)، جـ(−٣، −٥) فإن:

(أ) إحداثيى نقطة ء هى ....

(ب) إحداثيى النقطة م هى ....

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) (أ) إذا كانت النقط أ(٦، ٤)، ب(٤، ٠)، جـ(−٢، ٢) هى رؤوس لمتوازى الأضلاع أ ب جـ ء.

أوجد إحداثيى النقطة ء.

(ب) أ ب جـ ء شكل رباعى، س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بجـ}}$. أثبت أن $\overrightarrow{\text{أء}}$ + $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س ص}}$

(٦) (أ) إذا كانت أ(٣، −١)، ب(−١، ٢)، جـ(٤، ٠) فأوجد إحداثيى نقطة هـ حيث $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، ٥)، وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−٢، ١)، (٢، ٧).

(٧) (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٠، ٢). ثم أوجد قياس الزاوية بين هذا المستقيم، والمستقيم س + ٢ص − ٥ = ٠

(ب) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (م، −٣) إلى المستقيم ٥س − ١٢ص + ٦ = ٠ يساوى ٤، فأوجد قيمة م.

(٨) (أ) إذا كان م_1 هو ميل المستقيم س + ٣ص = ٥، م_2 هو ميل المستقيم ٢س − ك ص + ٧ = ٠ فأوجد قيمة ك إذا كان:

أولًا: المستقيمان متوازيان. ثانيًا: المستقيمان متعامدان.

(ب) أوجد المساحة المحصورة بين المستقيمين ٣س + ٢ص − ٧ = ٠، ٢س − ٣ص + ٤ = ٠ ومحور السينات.

نماذج من أساليب التقويم

تقييم أداء الطالب فى الرياضيات

توجيهات لإنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به:

إن إنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به هو عملية مستمرة. تظهر بعض أدوات التقييم، منذ الوهلة الأولى، مناسبة جدًّا للمعلم ولطلابه، وتظهر أدوات أخرى جودة وفعالية بعد أن تتاح للمعلم فرصة تجريبها وتحسينها، وفى الوقت نفسه هناك أدوات غير صالحة لمستوى ما ولموقف تعليمى معين.

وهنا نضع بين أيدى زملائنا المعلمين بعض التوجيهات التى قد تكون مفيدة عند اختيار نماذج التقييم لبرنامج ما.

استخدام نموذج التقييم الذى يحقق أهدافك بحيث:

- يؤمن مراجعة لطرق التعليم التى استخدمتها، ويعطيك الدلائل التى تستفيد منها فى إعادة النظر وتعديل محتوى وسرعة عملية التعليم.
- يؤمن للطالب تأكيدًا لنجاحة في مجال ما، بالإضافة إلى تحديد التحسين المطلوب في مجالات أخرى.
- تؤمن نظم التقييم المتعارف عليها نتائج واقعية ملموسة.

اجعل من عملية التقييم خبرة إيجابية للطلاب وذلك من خلال:

- استخدام أساليب منوَّعة للتقييم.
- توفير فرص للطلاب يعرضون فيها إمكاناتهم الرياضية في جو يسمح بالأداء الأفضل.
- التركيز على ما يعرفه الطلاب ويتقنونه، لا على ما لا يعرفونه أو يتقنونه.
- حفز الطلاب على التحصيل بوضعهم أمام مهام تعكس قيمة جهودهم.

استخدام تقييم الأداء في التركيز على مهارات التفكير العليا، وذلك من خلال:

- التركيز على تقييم الأداء الذى يصور الطالب مفكرًا ناقدًا وحالا للمسائل.
- تحديد كيفية تعامل الطالب مع الرياضيات، لا كيفية حل المسائل فقط.

قدم الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

استخدام الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

- استخدام أنشطة متشابهة للأنشطة التدريسية فى عمل التقييم.
- استخدام الأنشطة التقويمية في تأكيد التعليم.
- تقديم التغذية الراجعة التفصيلية الفورية التى يحتاج إليها الطلاب لتأكيد عمليات التعلم.

أشرك كل طالب في عمليات التقييم، وذلك من خلال:

- تشجيع الطلاب على عرض أعمالهم.
- تشجيع الطلاب على المشاركة في تحقيق الأهداف.

استطلاع رأى الطالب

لكل عبارة من العبارات التالية ضع علامة (✓) أسفل الخانة التى تصف إحساسك.

العبارة	معظم الوقت	بعض الوقت	نادرًا ما يحدث
أتقدم بشكل ملحوظ فى مادة الرياضيات.			
احتاج إلى المساعدة فى حل كثير من المسائل.			
الرياضيات لها فائدة في جميع المواقف الحياتية			
أفهم المسائل اللفظية			
أستطيع حل معظم المسائل			
أفضِّل تجريب استراتيجيات جديدة في حل المسائل			
أصاب بالإحباط بسهولة من دراسة الرياضيات			
لدى دفتر منظم لمادة الرياضيات			
أعتقد أن الرياضيات ممتعة			

صف مشروعًا تفضِّل أن يعمل به الفصل. ما نوع الرياضيات المفضلة لديك؟ ولماذا؟

اكتب قائمة ببعض الأنشطة التى مارستها خارج المدرسة، واستخدمت فيها الرياضيات.

تقييم ذاتى لعمل الفريق:

أسماء الفريق: ....

اقرأ جيدًا كل عبارة من العبارات التالية، ثم أعط التقدير (٤) لمجموعتك إذا كنت توافق على العبارة، والتقدير (٣) إذا كنت توافق إلى حدٍّ ما، والتقدير (٢) إذا كنت لا توافق إلى حدًّ ما، والتقدير (١) إذا كنت لا توفق، واستخدم (غ م) وتعنى غير ملائم إذا كانت العبارة لا تنطبق على هذا الموقف. حوِّط استجابة واحدة لكل وصف لمجموعتك.

العبارات	موافق	موافق إلى حد ما	غير موافق إلى حد ما	غير موافق	غير ملائم
أعضاء المجموعة					
أنجزوا المهام المكلفين بها.	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا الغرض من المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا حل المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
استمعوا جيدًا إلى كل من الأفكار الأخري.	٤	٣	٢	١	غ م
قدموا تغذية راجعة لذوى الأفكار المشوشة.	٤	٣	٢	١	غ م
تعاونوا في تجهيز العمل الذى تم تجميعة.	٤	٣	٢	١	غ م
استقوا تكليفاتهم من اليوم السابق.	٤	٣	٢	١	غ م
عرضوا أفكارهم على المجموعة.	٤	٣	٢	١	غ م
تفاهموا مع بعضهم البعض عند الحاجة.	٤	٣	٢	١	غ م

من خلال العمل مع فريق، تعلمت ....

سجل عمل الفريق

أسماء الفريق:

لكل فريق عمل سجِّل التاريخ، والمهمة التى كلفوا بها، وأرقام الصفحات، ثم صف عمل أعضاء الفريق معًا للوصول إلى حل جماعى للمهمة التى كلفوا بها . اذكر أى طرق أو أساليب وجدتها مفيدة لإنجاز المهمة.

التاريخ	المهمة	وصف عمل الفريق

التقييم الذاتى للطالب

المهمة:

اكتب عمّا قمت بإنجازه.

مال الذى حاولت تعلُّمه؟ كيف بدأت عملك؟ مال الأدوات التى كنت في حاجة إليها؟ ما الذى تعلمته؟

ضع علامة (✓) أمام العبارات التى تصف طريقة عملك.

خطَّطت قبل البدء في العمل. كنت قادرًا على إجراء هذا العمل.

نماذج من أساليب التقويم

لم أفهم التعليمات.　　　اتبعت التعليمات ولكننى حصلت على إجابة خاطئة.

توصلت إلى طريقة أخرى لإنجاز المهمة.　　أستطيع شرح كيفية إنجاز هذه المهمة لشخص آخر.

كان العمل أسهل مما توقعت.　　كان العمل أصعب مما توقعت.　　إضافات أخرى:

دليل ملف الأداء

ضع علامة (✓) أسفل العمود المناسب والذى يصف أدائك في كل من النود التالية:

البند	طلب من قبل المعلم	قمت بتخطيطه	متضمن
قائمة المحتويات			
كتابة تفسيرات للمحتوى			
واجبات منزلية مصححة			
اختبارات مصححة			
أعداد			
عمليات على الأعداد			
قياس			
رسوم بيانية			
هندسة/ أشكال			
أنماط			
كسور/ أعداد كسرية			
كسور عشرية			
نسب، تناسبات، نسب مئوية			
حساب عقلى/ تقديرات			
احتمال			
إحصاء			
جبر			
الترابط والتداخل مع العلوم			
الترابط والتداخل مع القراءة والأدب			
الترابط والتداخل مع الجغرافيا			
الترابط والتداخل مع حياة الطالب			
مقال في الرياضيات			
صور/ رسوم متعلقة بالرياضيات			
مشروع			
مسائل مفضلة			
وصف للعمل مع وسائل إيضاحية			
يوميات مدونة			
عمل فريق			
تعليق يوضح فائدة ملف الأداء			

خبراتى في الرياضيات

الرياضيات التى أفضِّلها:

مهارات الرياضيات التى أتقنتها وأستطيع استخدامها:

المكافآت التى حصلت عليها في الرياضيات:

الأهداف التى أريد تحقيقها في مجال دراسة الرياضيات:

مهارات الرياضيات التى أحتاج إلى مزيد من التمرين عليها:

تقييم الأداء في حل المسائل

ضع علامة (✓) أسفل العمود المناسب والذى يصف بدقة عمل الطالب:

	فى معظم الأحيان	بعض الأحيان	أبدًا
افهم			
يقرأ المسألة بعناية.	....	....	....
يدرس أى جدول أو أي رسم بيانى.	....	....	....
يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصة.	....	....	....
يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.	....	....	....
يستطيع فهم وإدراك السؤال الذى يجب الإجابة عنه.	....	....	....
خطط			
يختار الخطة الأنسب لحل المسألة.	....	....	....
يقدر الإجابة الصحيحة.	....	....	....
حل			
يعمل وفق منهجية معينة.	....	....	....
يعرض الحل بطريقة منظمة ومنطقية.	....	....	....
يحسب بطريقة صحيحة.	....	....	....
يعطى الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.	....	....	....
تحقق			
يتحقق من معقولية الإجابة.	....	....	....
يجرب طرقًا أخرى لحل المسألة.	....	....	....
اتجاه			
يظهر استعدادًا لمحاولة حل المسألة.	....	....	....
يظهر ثقة بالنفس.	....	....	....
محاولات خاطئة لحل المسألة.	....	....	....

تعليقات أخرى

نماذج من أساليب التقويم

التقييم المستمر: حل المسائل

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يقرأ المسألة بعناية.	يدرس الصور والجداول والتمثيلات البيانية.	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاص.	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تتطلب الإجابة عنها	يختار الخطة المناسبة.	يقدر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحل بطريقة منظمة.	يجري العمليات الحسابية بدقة.	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة.	يتحقق من صحة الإجابة ومعقوليتها.	يجري طرقاً أخرى للحل.
١-													
٢-													
٣-													
٤-													
٥-													
٦-													
٧-													
٨-													
٩-													
١٠-													
١١-													
١٢-													
١٣-													
١٤-													
١٥-													
١٦-													
١٧-													
١٨-													
١٩-													
٢٠-													
٢١-													
٢٢-													
٢٣-													
٢٤-													
٢٥-													
٢٦-													
٢٧-													
٢٨-													

التقييم المستمر: الملاحظة

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب ونظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرى طرقًا أخرى للحل
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

نماذج من أساليب التقويم

التقييم المستمر: التعلم التعاوني

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر قدرة علي حل المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجه ويساعد آخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلم بهدوء	يطرح أسئلة	يظهر ميولاً إيجابية	يظهر صبرًا ومثابرة	يظهر عدم موافقة دون اشمئزاز
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

التقيم الفردى من خلال الملاحظة

	دائمًا	أحيانًا	أبدًا
الفهم			
يظهر معرفة بالمهارات.	....	....	....
يدرك المفاهيم.	....	....	....
يختار الخطة المناسبة للحل.	....	....	....
يحل المسائل بدقة.	....	....	....
عادات العمل			
يعمل بطريقة منظمة.	....	....	....
يعمل بنظافة.	....	....	....
يقدم العمل في الوقت المحدد.	....	....	....
يعمل مع الآخرين بتناغم.	....	....	....
يستخدم الوقت بفاعلية وإنتاجية.	....	....	....
يطلب المساعدة عند الحاجة.	....	....	....
الثقة بالنفس	....	....	....
يبادر بتوجيه الأسئلة.	....	....	....
إيجابى التوجيه والسلوك.	....	....	....
يساعد الآخرين.	....	....	....
المرونة			
يجرب طرقًا أخرى.	....	....	....
يحترم ويستخدم أفكار الآخرين.	....	....	....
يستخدم الرياضيات الذهنية والتقدير.	....	....	....
يستخدم الآلات الحاسبة والتقنيات الأخرى.	....	....	....
المثابرة			
يظهر صبرًا ومثابرة.	....	....	....
يعمل وفق منهجية معينة.	....	....	....
يظهر استعدادًا للمحاولة والتجربة.	....	....	....
يتأكد من صحة عمله دون أن يطلب منه.	....	....	....

نماذج من أساليب التقويم

التقييم العام للطالب:

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	حل المسائل	التعلم التعاوني	الكتابة في الرياضيات	نشاط غرفة الفصل	الواجبات المنزلية	المشاركة في المناقشة	درجات الاختبارات القصيرة	درجات الامتحانات		
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

قائمة المراجعة/عرض المشروع

يمكن أن يستخدم هذا النموذج لتقييم مشروع ما مقدم من قبل طالب واحد أو من مجموعة طلاب شفهيًّا أو كتابة، كما أنه من الممكن أن يستخدم لمناقشة طرق ناجحة لتقديم أى مادة، ومن المفيد أن يقدم للطلاب لإرشادهم فى التخطيط لأى مشروع في فن الرياضيات أو التجارب العلمية، أو تجميع البيانات لعمل الجداول والرسوم البيانية، أو عروض حاسوبية، أو مسرحيات هزلية قصيرة، أو أى مشروع بحثى سواء أكان شفهيًّا أم مكتوبًا.

الطالب/ الطلاب: ....

المشروع: ....

قدر كل بند بـ:
- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

المشروع

يعرض مفهومًا رياضيًا بشكل جيد.

يتواصل مع الأفكار الرياضية بوضوح.

يربط مع مواد أخرى.

يظهر الوقت الذى انقضى عليه تخطيطًا وتحضيرًا.

هو أصيل و/ أو مبدع.

هو نابض بالحياة ونظيف.

يثير المزيد من الاستقصاءات حول الموضوع.

يتضمن تقريرًا مكتوبًا.

يذكر المواد المستخدمة.

يظهر توزيع المهام التى كلفت بها مجموعة الطلاب.

التقويم الشفهى

يظهر معرفة للمفهوم الرياضى

منظم: يتضمن مقدمة ومضمونًا وخاتمة.

يستخدم الوسائل السمعية/ البصرية عند الحاجة وفى الوقت المناسب.

يتكلم بوضوح ويضبط التقويم بما يناسب من سرعات.

يجيب عن الأسئلة ويثير مزيدًا من الاهتمام بالموضوع.

يظهر ميلًا وتوجهًا إيجابيين لحل المسائل.

يذكر الموارد المستخدمة.

نماذج من أساليب التقويم

تقييم ملف انجاز الطالب

المحتوى	مطلوب	متضمن	ملاحظات
رسالة من الطالب: تفسير المحتوى. معيار الاختبار.			
اقتطاع من يوميات.			
العمل على حل سؤال مفتوح غير منته.			
صورة أو رسم لمسألة وقد عولجت بوسائل إيضاحية.			
العلاقة والتواصل مع الرياضيات: مسائل لها علاقة بفصول أخرى. مسائل لها علاقة بأكثر من مجال من مجالات الرياضيات.			
العلاقة والتواصل مع موضوعات أخرى: مسائل لها علاقة بالصحة أو بالعلوم، أو بالفن، أو بالأدب أو بجمع البيانات أو بالدراسات الاجتماعية أو بالتاريخ أو بالجغرافيا.			
اختبار قصير أو واجب منزلي مصحح أو مراجع.			
مشروعات			
تعليق من الطالب: كيف يشكل الملف عونًا للطالب.			